Oefenen met algebraïsche vaardigheden voor wiskunde A leerlingen havo

als voorbereiding op een economische of technische hbo-opleiding

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

slo

Oefenen met algebraïsche vaardigheden voor wiskunde A leerlingen havo

als voorbereiding op een economische of technische hbo-opleiding

2^e gew. dr.

April 2012

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording

Auteur: Lysbeth van de Zee
Eindredactie: Nico Alink, Jos Tolboom en Anne Beeker

Informatie
SLO
Afdeling: tweede fase
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 661
Internet: www.slo.nl
E-mail: tweedefase@slo.nl

AN: 3.0127.491

Inhoud

Informatie voor docenten

In het examenprogramma wiskunde A havo zijn het aanleren van algebraïsche vaardigheden en het rekenen zonder technische hulpmiddelen geen aandachtspunten. In het programma is gekozen voor contextrijke wiskunde met de grafische rekenmachine als voortdurend beschikbaar hulpmiddel. Bij de economische en technische opleidingen in het hbo verwacht men echter dat de instromende leerling met wiskunde A de algebraïsche vaardigheden beheerst en kan rekenen zonder rekenmachine. Veel technische opleidingen doen daarnaast ook nog een beroep op andere wiskundige vaardigheden.
Om dit tekort op te heffen, worden in veel hbo-opleidingen weliswaar instapcursussen georganiseerd, maar die gaan uit van een achtergrond met wiskunde B. Met alleen Wiskunde A in het pakket zijn deze cursussen meestal erg lastig. Daarnaast worden er aan sommige HBO-opleidingen ook uitgebreidere cursussen gegeven, die bedoeld zijn als voorbereiding op een toelatingsexamen. Deze cursussen zijn bedoeld voor studenten van wie de vooropleiding geen directe toegang tot de vervolgstudie biedt of die deficiënties vertonen, zoals het ontbreken van wiskunde in het pakket, en die daarom toelatingsexamen moeten doen. Deze cursusen zijn arbeids- en tijdintensief. Maar zelfs bij veel aankomende studenten met het juiste pakket ervaren docenten van economische en technische opleidingen een gebrek aan beheersing van de voor die opleiding vereiste vaardigheden.

Aangezien alle scholen voor havo hun leerlingen in de vrije ruimte de gelegenheid kunnen bieden zelf onderdelen aan het vakkenpakket toe te voegen, lijkt het zinvol een module te ontwikkelen die de aansluiting naar het hbo op het gebied van algebraïsche vaardigheden en het rekenen zonder technische hulpmiddelen verbetert.

Voorafgaand aan het schrijven van het leerlingenmateriaal is er een bescheiden literatuuronderzoek verricht en zijn docenten van economische en technische opleidingen gevraagd naar hun bevindingen.
In het voorjaar van 2010 heeft de Landelijke Werkgroep HBO-wiskunde van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) een enquête onder hbo-docenten gehouden met het oog op de aansluiting mbo-hbo bij techniek en economie. De resultaten hiervan zijn ook in deze module meegenomen.
Op basis van deze raadplegingen zijn de onderwerpen voor deze module gekozen.

Doelgroep en doelstellingen van de module
De module is bestemd voor leerlingen in het havo met wiskunde A die van plan zijn in het hbo een economische of technische studie te gaan volgen en voor eerstejaars studenten in deze opleidingen die merken dat hun kennis en vaardigheden op dit gebied te kort schieten.
De module heeft als doel een aantal wiskundige vaardigheden die in de vervolgstudies van belang zijn te herhalen en op een voldoende niveau te brengen. Ook wordt rekenvaardigheid geoefend zodat leerlingen in staat zijn te rekenen zonder gebruik te hoeven maken van een grafische rekenmachine.

Nadrukkelijk moet vermeld worden dat deze module niet een volledige behandeling geeft van alle wiskundige vaardigheden die in een aantal vervolgstudies in het hbo gevraagd worden.Ruimtelijk inzicht en wiskundige abstractie, zaken die bij een aantal opleidingen in het hbo van belang zijn worden bijvoorbeeld niet behandeld.
De feitelijk benodigde wiskundekennis verschilt in het hbo van opleiding tot opleiding. Voor veel technische opleidingen is wiskunde A volstrekt onvoldoende. Het wiskundeprogramma van deze opleidingen sluit veel beter aan op het wiskunde B programma havo. Daarom is overleg met de instroomcoördinator van de betreffende opleiding over de beste voorbereiding dringend aan te raden.

Onderwerpen die niet in het wiskunde A programma zitten, worden niet behandeld. Wel gaat de module soms uitgebreider en abstracter in op de onderwerpen die behandeld worden dan in het wiskunde A programma. Dit wordt gedaan omdat bij deze onderwerpen de vervolgopleidingen er van uitgaan dat de studenten die technieken ook beheersen.
Zo wordt in het wiskunde A programma (http://www.slo.nl/Handreiking_wiskunde_A_havo_pdf) bij de breuken alleen de bewerking $\frac{a}{b} \cdot c = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$ vereist. Uit de enquête van de NVvW blijkt echter dat in het hbo verwacht wordt dat leerlingen ook de andere bewerkingen beheersen.

In de gesprekken met de hbo-docenten kwam naar voren dat ook het kunnen “spelen” met formules en het kunnen lezen van vergelijkingen erg op prijs wordt gesteld. In de opgaven wordt daarom niet alleen met getallen geoefend maar ook met letters.
De doelstelling van de module, het paraat hebben van reken vaardigheden zonder rekenmachine, heeft consequenties voor de vorm van het leerlingenmateriaal. De meeste oefeningen zijn “kale” oefeningen. Zo kan de leerling zich helemaal richten op het opfrissen van de vaardigheden.
We hebben ervoor gekozen de leerling niet te belasten met te veel formeel-wiskundige zaken. Zo laten we bijvoorbeeld onvermeld binnen welke getalverzameling (N, Z, Q, R) een specifieke vergelijking moet worden opgelost.
De verzameling van complexe getallen ($\mathbb{C}$) wordt sowieso niet benut om bijvoorbeeld een tweedegraads vergelijking met een negatieve discrimant op te lossen. We proberen hiermee de leerling niet af te leiden met formele zaken, maar hem zich te laten concentreren op praktisch probleemoplossen. De formeel-wiskundig geschoolde lezer kan zich hier mogelijk aan storen.
Het leerlingenmateriaal bevat een diagnostische entreetoets en een eindtoets.
De module bestaat uit drie hoofdstukken:
1. Basisvaardigheden
2. Eerstegraads functies en vergelijkingen
3. Tweedegraads functies en vergelijkingen.

Hoofdstuk 1 Basisvaardigheden is onderverdeeld in:
1.1. Terminologie en algemene algebraregels
1.2. Breuken
1.3. Machten
1.4. Procenten, met een eerste aanzet tot exponentiële functies.

Adviezen ten aanzien van het gebruik van de module
De eerste twee hoofdstukken zijn geschikt voor alle leerlingen die een economische of technische vervolgstudie gaan doen. Het laatste hoofdstuk is met name gericht op technische vervolgstudies. Bij de economische opleidingen worden de tweedegraads vergelijkingen niet altijd in de eerstejaars stof behandeld. Maar ook voor leerlingen die een economische vervolgopleiding gaan doen kan het geen kwaad om deze leerstof op te frissen.

Een rekenmachine is bij deze module niet toegestaan. Een uitzondering vormt de paragraaf procenten, de berekeningen in deze paragraaf zijn te bewerkelijk om zonder rekenmachine uit te voeren. De module verliest zijn waarde als leerlingen een rekenmachine gebruiken. De module kan op individuele basis worden doorgewerkt, eventueel ook in groepjes van maximaal drie personen.

Het advies is om te beginnen met de entreetoets. Die is ingedeeld volgens de hoofdstukken van deze module. De leerling kan op grond van het resultaat van de toets kiezen welke hoofdstukken nog nadere studie vragen.

Informatie voor leerlingen

In het examenprogramma wiskunde A havo is gekozen voor contextrijke wiskunde waarbij de (grafische) rekenmachine altijd gebruikt mag worden. Bij de economische en technische opleidingen in het hbo verwacht men echter dat de studenten ook een aantal vaardigheden, waaronder de algebraïsche vaardigheden en het rekenen zonder rekenmachine, Beheersen die niet voorkomen in het programma van wiskunde A.
De feitelijk benodigde wiskunde kennis verschilt sterk van opleiding tot opleiding. Voor veel technische opleidingen is wiskunde A volstrekt onvoldoende. Bij die vakken gaat het bovendien niet alleen om formulevaardigheden, maar ook om zaken als ruimtelijk inzicht en wiskundige abstractie. Het wiskunde programma van die opleidingen sluit veel beter aan op het wiskunde B programma havo.
Omdat de beste vooropleiding sterk afhankelijk is van de opleiding, is overleg met de instroomcoördinator van de betreffende opleiding dringend aan te raden.

De module heeft als doel om een aantal wiskundige vaardigheden die in de vervolgstudies van belang zijn te herhalen en op een hoger niveau te brengen. In deze module kom je alleen onderwerpen tegen die in het wiskunde A havo programma thuis horen.

De module heeft een studielast van ongeveer 40 slu en bevat de volgende onderwerpen:

- terminologie en algemene algebraregels;
- breuken;
- machten;
- procenten, met een eerste aanzet tot exponentiële functie;
- eerstegraads functies en vergelijkingen;
- tweedegraads functies en vergelijkingen.

Aan de hand van voorbeelden en opgaven ga je oefenen met verschillende wiskundige vaardigheden om zo de stof voldoende paraat te maken. Het is belangrijk om alle rekenregels en de daarbij behorende voorbeelden goed door te nemen en tussenstappen te begrijpen.
Het gaat in deze module hoofdzakelijk om de elementaire ‘kale’ wiskundige vaardigheden. Toepassingen in contexten komen slechts op een aantal plaatsen aan bod.
Om de rekenvaardigheden goed te oefenen en om een goed inzicht te krijgen in de rekenvaardigheden die in de module aan de orde komen, mag er geen gebruik worden gemaakt van een rekenmachine. Een uitzondering vormt de paragraaf procenten. Berekeningen in deze paragraaf zijn te bewerkelijk om zonder rekenmachine uit te voeren.

Het is de bedoeling dat je de module zelfstandig, of indien mogelijk in een groepje met klasgenoten, doorwerkt. Mochten de gegeven voorbeelden in deze module je niet voldoende houvast geven dan verwijzen we voor extra uitleg naar je schoolboek of docent.
Achter in deze module vind je de antwoorden op de opgaven. Mocht je ergens niet uitkomen of vastlopen dan kun je je docent of medeleerlingen raadplegen.

Naast theorie en opgaven bevat de module een entreetoets en een eindtoets. De entreetoets geeft je een goed idee van de stand van zaken: hoe sta je er voor? Aan de hand van deze toets kun je bepalen welke onderwerpen je moet doornemen.

De eindtoets is opgenomen in de docentenhandleiding. Overleg dus met je docent wanneer je die krijgt. Met de eindtoets kun je laten zien in hoeverre je er op vooruit gegaan bent.
De studielast is ongeveer 40 slu, maar hangt natuurlijk wel af van de kennis die je al hebt.
In de module is gebruik gemaakt van materiaal uit de modules 'Rekenvaardigheden in de Tweede Fase havo als voorbereiding op Pabo' en 'Algebraïsche vaardigheden in de Tweede Fase vwo als voorbereiding op economische studies'.
Website: http://www.slo.nl/tweedefase/wiskunde/lesmateriaal/

1. Basisvaardigheden

1.1 Terminologie en rekenregels

De uitkomst van een optelling noemen we de **som**, de uitkomst van een aftrekking het **verschil**. De getallen die opgeteld of van elkaar worden afgetrokken zijn de **termen**.

Voorbeelden:

1. $3+4=7$ 3 en 4 zijn de termen, 7 is de som.
2. $4-3=1$ 4 en 3 zijn de termen, 1 is het verschil.

De uitkomst van een vermenigvuldiging noemen we het **product**, de uitkomst van een deling het **quotiënt**. De getallen die vermenigvuldigd of gedeeld worden zijn de **factoren**.
Voorbeelden:

1. $3\cdot 4=12$ 3 en 4 zijn de factoren, 12 is het product.
2. $3:4=\frac{3}{4}$ 3 en 4 zijn de factoren, $\frac{3}{4}$ is het quotiënt.

De volgorde van de bewerkingen is:

$$\boxed{\text{Machtsverheffen/worteltrekken, vermenigvuldigen/delen, optellen/aftrekken}}$$

De volgorde tussen machtsverheffen en worteltrekken is dat de bewerking van links naar rechts wordt uitgevoerd. Dit geldt ook voor vermenigvuldigen en delen en voor optellen en aftrekken.

Voorbeelden

1. $4:2\times 3=6$

2. $6\times 5:2=15$

Wil je de volgorde veranderen, dan gebruik je **haakjes**. De bewerking binnen de haakjes gaat voor.

Voorbeelden

1. $4:(2\cdot 3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
2. $6\times(5:2)=6\times 2{,}5=15$

Zijn er meerdere haakjes, dan werk je van binnen naar buiten.

Voorbeelden

1. $4-(3-(7-2))=4-(3-5)=4-(-2)=4+2=6$
2. $6-(2+3(14-9))=6-(2+3\times 5)=6-17=-11$

De volgende **tekenregels** gelden. Een even aantal minnen achter elkaar geeft een plus, een oneven aantal minnen achter elkaar geeft een min.

Voorbeelden bij optellen en aftrekken

$12-(-7)=12+7=19$ $\quad$ $-12-(-7)=-12+7=-5$

$12-7=5$ $\quad$ $-12-7=-19$

Voorbeelden bij vermenigvuldigen en delen

$-7\times 7=-49$ $\quad$ $-7\times -7=49$ $\quad$ $7\times 7=49$

$\frac{-49}{7}=-7$ $\quad$ $\frac{49}{-7}=-7$ $\quad$ $-\frac{49}{7}=7$

$\frac{49}{7}=7$ $\quad$ $-\frac{-49}{-7}=-7$

Werken met letters

Alle rekenregels gelden ook bij het rekenen met letters.

Het vermenigvuldigingsteken tussen letters kan verwarring opleveren. Is het een vermenigvuldigingsteken of de letter x? Bij het rekenen met letters wordt daarom vaak de vermenigvuldigingspunt " · " gebruikt of het vermenigvuldigingsteken tussen de cijfers en letters weggelaten.

Dus: $a\times b=a\cdot b=ab$ en $a+a+a=3\times a=3\cdot a=3a$

Voorbeelden

1. $a-(3-(2+a))=$
   $a-(3-2-a)=$
   $a-(1-a)=$
   $a-1+a=$
   $2a-1$
2. $a+2(a-(1-2a))=$
   $a+2(a-1+2a)=$
   $a+2(3a-1)=$
   $a+6a-2=$
   $7a-2$

3. Bereken $ab + c - 4a$ voor $a = -2,\ b = 6,\ c = 3$
geeft $-2 \cdot 6 + 3 - 4 \cdot (-2) = -12 + 3 + 8 = -1$

Volgorde van optellen
Bij het optellen van twee of meer getallen doet de volgorde van die getallen in de optelling er niet toe:

$$a + b = b + a$$

Volgorde van vermenigvuldigen
Bij het vermenigvuldigen van twee of meer getallen doet de volgorde van die getallen in de vermenigvuldiging er niet toe:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Werken met haakjes

$$\boxed{a(b + c) = ab + ac}$$

Voorbeeld

$$2(5 + 7) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 10 + 14 = 24 \text{ (via deze regel)}$$
$$2(5 + 7) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (direct)}$$

$$\boxed{-a(b + c) = -ab - ac}$$

Voorbeeld

$$-3(5 + 7) = -3 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -36 \text{ (via deze regel)}$$
$$-3(5 + 7) = -15 - 21 = -36 \text{ (direct)}$$

$$\boxed{(a + p)(b + q) = ab + aq + pb + pq}$$

Voorbeelden

1. $(4 + 2)(3 + 5) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 =$
$= 12 + 20 + 6 + 10 = 48$
2. $(a + 2)(b + 1) = ab + a + 2b + 2$

$$\boxed{(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Voorbeelden

1. $(3 + 5)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 5^2 = 9 + 30 + 25 = 64$ (via deze methode)
$(3 + 5)^2 = 8^2 = 8 \cdot 8 = 64$ (direct)
2. $(c + 2)^2 = c^2 + 2 \cdot 2 \cdot c + 2^2 = c^2 + 4c + 4$

$$\boxed{(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Voorbeelden

1. $(7-3)^2 = 7^2 - 2\cdot 3\cdot 7 + 3^2 = 49 - 42 + 9 = 16$ (via deze methode)
   $(7-3)^2 = 4^2 = 4\cdot 4 = 16$ (direct)
2. $(a-4)^2 = a^2 - 2\cdot 4\cdot a + 4^2 = a^2 - 8a + 16$

$$\boxed{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$$

Voorbeelden

1. $(6-2)(6+2) = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$ (via deze methode)
   $(6-2)(6+2) = 4\cdot 8 = 32$ (direct)

2. $(b-4)(b+4) = b^2 - 4^2 = b^2 - 16$

Opgaven

1. Laat zien, door het wegwerken van de haakjes, dat de regel
   $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ klopt.

2. Werk de haakjes weg en vereenvoudig zo ver mogelijk:

   a. $a + b + (c - 4d) + 5e - 3c =$

   b. $5x + 6y - (2x - y) =$

   c. $2x + 7y - 5x - (-3x - 4y) =$

   d. $3x + 2y - (4y + (3y - 1)) =$

   e. $15x - (3x - (2x + 3y) + 6y) =$

   f. $10a - 7b - (13a - 6b(5a - 3b)) =$

   g. $20y - 3x + 7y - 4(2x - 5y) + 15 =$

   h. $35 - (y + 3) + 8(1 - 2y) =$

   i. $-9(a - 1) - (6 + 2(4 - a)) =$

   j. $6(5 + 2b) - 3(a - 3) =$

3. Schrijf als tweeterm of drieterm (werk de haakjes weg):

a. $3(4x-8)=$

b. $(4+a)(-6+a)=$

c. $4(7+ab)=$

d. $(x+4)(2x-4)=$

e. $(a-11)(a-4)=$

f. $(3a-4)(2a+7)=$

g. $-2(7-3b)=$

h. $(3-2a)(2+a)=$

i. $(a-10)(a+10)=$

j. $4a(a^2-2a)=$

k. $(x+3)(x-5)=$

l. $-2a(13-b)(1-b)=$

4. Neem $a=6 \text{ en } b=-2$ en bereken:

a. $5a+2b=$

b. $ab^2=$

c. $4+2a=$

d. $5a \cdot 4b=$

e. $12b^2=$

f. $(12b)^2=$

g. $-(12b)^2=$

5. Neem $a=-10, b=\frac{1}{2}$ en bereken:

a. $(ab)^2=$

b. $ab^2=$

c. $(4-a)(-b)^2=$

d. $2(a-3(6-4b))(5-a)=$

1.2 Breuken

$\frac{p}{q}$ noemen we een breuk, *p* is de teller, *q* is de noemer.

Voor een breuk geldt dat de noemer ongelijk aan nul moet zijn.

Voor het minteken voor de breuk geldt: $-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}$

Voorbeeld:

$$-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$$

Rekenregels voor breuken

$$\boxed{\frac{p}{p} = 1}$$

Vereenvoudigen

$$\boxed{\frac{pc}{qc} = \frac{p}{q}}$$

Een breuk verandert niet als je teller en noemer door hetzelfde getal deelt of met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

Voorbeelden

1. $\frac{6}{12} = \frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{1}{2}$

2. $\frac{2p+2}{4} = \frac{p+1}{2}$

Optellen en aftrekken van breuken

$$\boxed{\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q} \quad , \quad \frac{p}{q} - \frac{r}{q} = \frac{p-r}{q}}$$

Als van twee breuken de noemers gelijk zijn kun je de twee breuken onder een noemer brengen. Het bij elkaar optellen of aftrekken van de breuken doe je door de noemer te laten staan en de tellers op te tellen of af te trekken.

Voorbeelden

1. $\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$

2. $\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

3. $\frac{3}{p}+\frac{2}{p}=\frac{5}{p}$

4. $\frac{q}{4}-\frac{1}{4}=\frac{q-1}{4}$

Als de noemers niet gelijk zijn, kun je breuken bij elkaar optellen of aftrekken door eerst de noemers gelijk te maken. We zeggen dan dat we de breuken gelijknamig maken. Hierbij maken we gebruik van de eigenschap van een dat die niet verandert als je teller en noemer door hetzelfde getal deelt of met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

$$\boxed{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\times s}{q\times s}+\frac{r\times q}{q\times s}=\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}=\frac{ps+qr}{qs}}$$

Bij het vermenigvuldigen van letters wordt het maalteken vaak weggelaten.

Voorbeelden

1. $\frac{4}{7}+\frac{2}{5}=\frac{4\times5}{7\times5}+\frac{2\times7}{5\times7}=\frac{20}{35}+\frac{14}{35}=\frac{20+14}{35}=\frac{34}{35}$

2. $\frac{3}{p}+\frac{6}{11}=\frac{3\times11}{11p}+\frac{6p}{11p}=\frac{33+6p}{11p}$

3. $\frac{2}{a+1}+\frac{3}{4}=\frac{2\times4}{4(a+1)}+\frac{3(a+1)}{4(a+1)}=$

$\frac{8}{4(a+1)}+\frac{3a+3}{4(a+1)}=\frac{8+3a+3}{4(a+1)}=\frac{11+3a}{4(a+1)}$

4. $\frac{p}{4}+\frac{p+2}{8}=\frac{2p}{8}+\frac{p+2}{8}=\frac{2p+p+2}{8}=\frac{3p+2}{8}$

5. $\frac{2}{b+1}-\frac{3}{4}=\frac{2\times4}{4(b+1)}-\frac{3(b+1)}{4(b+1)}=\frac{8-3(b+1)}{4(b+1)}=\frac{8-3b-3}{4(b+1)}=\frac{5-3b}{4(b+1)}$

Vermenigvuldigen van breuken

$$\boxed{\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}}$$

Vermenigvuldigen van breuken: teller maal teller en noemer maal noemer.

Voorbeelden

1. $\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{8\times7}=\frac{15}{56}$

2. $\frac{p}{2}\times\frac{3}{q}=\frac{3p}{2q}$

Delen van breuken

$$\boxed{\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\times\frac{s}{r}=\frac{ps}{qr}}$$

Delen door een breuk is hetzelfde als het vermenigvuldigen met het omgekeerde van de breuk.

Voorbeelden

1. $\frac{7}{2}:\frac{3}{4}=\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{7\cdot4}{2\cdot3}=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}$

2. $\frac{3}{p}:\frac{5}{2}=\frac{3}{p}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot2}{p\cdot5}=\frac{6}{5p}$

Let op. **Delen door nul is niet toegestaan!**

$\frac{12}{2}=6$; waarom? Omdat $2\times6=12$. Maar wat is nu $\frac{4}{0}$?

Wat is het antwoord? Misschien nul? Nee, want 0×0 is niet 4. Misschien 4? Nee, want 0×4 is niet 4. Er is geen getal te vinden waarvoor geldt: 0 keer dat getal is 4. Je kunt dus niet delen door nul.

Niet altijd is het zo makkelijk te zien dat je door nul deelt.

Voorbeeld

Neem de vergelijking $a^2-a^2=a^2-a^2$ met $a\neq0$.

Links en rechts a^2-a^2 verschillend ontbinden (zie par.1.1) geeft:

$a(a-a)=(a+a)(a-a)$ links en rechts delen door $(a-a)$ geeft

$a=a+a$

$a=2a$

$1=2$

Door te delen door nul (waar?) krijg je dat 1 gelijk is aan 2!

Opgaven

1. Vereenvoudig zover mogelijk:

a. $\frac{4}{12}$

b. $\frac{3}{33}$

c. $\frac{3+15}{8}$

d. $\frac{6+14}{4}$

e. $\frac{38-13}{10}$

f. $\frac{14+15}{61-22}$

g. $-\frac{4-6}{14}$

h. $\frac{-3+5}{6-8}$

i. $\frac{8+28}{2+7}$

j. $-\frac{-4}{-16}$

k. $\frac{75}{15}$

l. $\frac{13-25}{144}$

m. $\frac{24+31}{11}$

n. $-\frac{-2-4}{7+5}$

o. $-\frac{27-39}{-3}$

2. Vereenvoudig zover mogelijk:

a. $\frac{12a}{2}$

b. $\frac{4x+2}{12x+4}$

c. $\frac{5ab}{30ac}$

d. $\frac{36b}{9a}$

e. $\frac{15ab}{3ab}$

f. $\frac{4y^2+y}{y}$

g. $\frac{12a+4}{2}$

h. $\frac{x^2+4x}{x}$

i. $\frac{9b-3}{12b}$

3. Maak gelijknamig en breng onder één noemer(schrijf als één breuk):

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ f. $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ k. $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$

b. $\frac{2}{11}+\frac{3}{4}$ g. $\frac{5}{6}+\frac{1}{9}$ l. $\frac{4}{7}+\frac{3}{4}$

c. $\frac{2}{13}-\frac{1}{4}$ h. $\frac{3}{8}+\frac{8}{3}$ m. $\frac{7}{3}+\frac{15}{9}$

d. $\frac{1}{3}+\frac{3}{13}$ i. $\frac{7}{12}+\frac{7}{8}$ n. $\frac{6}{7}-\frac{1}{13}$

e. $\frac{-5}{9}-\frac{2}{3}$ j. $-\frac{1}{12}+\frac{-1}{4}$ o. $\frac{3}{13}-\frac{-1}{2}$

4. Maak gelijknamig, breng onder één noemer en vereenvoudig zover mogelijk:

a. $\frac{2a}{2}+\frac{5a}{3}$ d. $\frac{3a}{bc}-\frac{a}{c}$ g. $\frac{5y}{3z}-\frac{2y}{3c}$

b. $\frac{a}{3}+\frac{b}{6}$ e. $-\frac{a}{b}-\frac{1}{2}$ h. $\frac{4}{7}+\frac{3}{a}$

c. $\frac{4}{a}+\frac{5}{2a}$ f. $\frac{7}{2b}-\frac{4}{5b}$ i. $\frac{6}{a}-\frac{1}{3b}$

5. Schrijf als één breuk:

a. $\frac{7}{8} \times \frac{2}{5}$

f. $\frac{8}{9} \times \frac{7}{11}$

k. $\frac{5}{2} : \frac{1}{3}$

b. $\frac{3}{12} \times \frac{5}{7}$

g. $\frac{7}{8} : \frac{2}{5}$

l. $\frac{11}{13} \times \frac{0}{11}$

c. $\frac{4}{11} \times \frac{2}{7}$

h. $\frac{4}{7} : \frac{4}{7}$

m. $\frac{7}{8} \times \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

d. $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{7}$

i. $\frac{5}{4} : \frac{6}{7}$

n. $\frac{7}{9} : 2$

e. $3\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{4}$

j. $\frac{3}{4} : \frac{4}{3}$

o. $4 : \frac{5}{6}$

6. Schrijf als één breuk en vereenvoudig indien mogelijk:

a. $\frac{b}{a} \times \frac{c}{3}$

d. $\frac{b}{a} : \frac{b}{a}$

g. $\frac{4}{7} : \frac{1}{2} \times \frac{a}{b}$

b. $\frac{6}{c} \times \frac{4}{7}$

e. $\frac{4}{c} \times \frac{c}{5}$

h. $\frac{a}{9} \times \frac{2}{7}$

c. $\frac{9}{2} \times \frac{8}{3a}$

f. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{b}$

i. $\frac{3a}{5} : \frac{2}{9}$

7. Schrijf als de som of het verschil van twee breuken:

a. $\dfrac{15+a}{3}$ d. $\dfrac{3+c}{7}$ g. $\dfrac{a+4}{a}$

b. $\dfrac{1+c}{a}$ e. $\dfrac{2-b}{3}$ h. $\dfrac{q+p}{2}$

c. $\dfrac{3+4}{a}$ f. $\dfrac{3a-b}{c}$ i. $\dfrac{p+6}{q}$

8. Breng onder één noemer:

a. $\dfrac{5}{a+3}+\dfrac{3}{2}$ b. $\dfrac{p}{3}+\dfrac{p}{q+1}$ c. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{4}{1+a}$

9. Bereken en vereenvoudig zover mogelijk:

a. $\dfrac{5}{9}+\dfrac{7}{2}\times\dfrac{1}{3}$ c. $\dfrac{4}{11}:\dfrac{2}{5}\times\dfrac{7}{3}$ e. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{-2}{3}-\dfrac{1}{2}$

b. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{4}:\dfrac{3}{2}$ d. $\dfrac{3}{8}\times\dfrac{6}{2+3}$ f. $\dfrac{5}{7}:(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})$

1.3 Machten

5^3 noemen we een macht, 5 is het grondtal, 3 is de exponent.

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

De exponent *3* zegt dat de macht 5^3 een vermenigvuldiging is van *3* vijven.

Zo is $5 = 5^1$. Het getal 5 staat er slechts eenmaal.

Bij de rekenregels voor de machten nemen we het grondtal a positief. De reden daarvoor komt verderop bij de gebroken exponenten.

Rekenregels voor machten
We gaan uit van $a > 0$. Dan geldt:

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Twee machten met **hetzelfde** grondtal met elkaar vermenigvuldigen, doe je door het grondtal te laten staan en de exponenten bij elkaar op te tellen.

Voorbeelden

1. $5^2 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 5^{2+4}$

2. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

3. $a^3 \cdot a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^5 = a^{3+2}$

4. $a^6 \cdot a^2 = a^{6+2} = a^8$

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Twee machten met **hetzelfde** grondtal op elkaar delen, doe je door het grondtal te laten staan en de exponenten van elkaar af te trekken.

Voorbeelden

1. $\dfrac{3^6}{3^2} = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{1} = 3^4 = 3^{6-2}$

2. $\dfrac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$

3. $\dfrac{a^5}{a^2} = \dfrac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = \dfrac{a \times a \times a}{1} = \dfrac{a^3}{1} = a^3 = a^{5-2}$

4. $\dfrac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

Als we de rekenregel voor delen van machten gebruiken in het geval dat de exponenten in de teller en noemer gelijk zijn, krijgen we $1 = \frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0$

Dus $\boxed{a^0 = 1}$

$$\boxed{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$$

De macht van een macht krijg je door het grondtal te laten staan en de exponenten met elkaar te vermenigvuldigen.

Voorbeelden

1. $(5^3)^2 = 5^3 \cdot 5^3 = 5^{3+3} = 5^6$

2. $(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$

3. $(b^2)^4 = b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 = b^{2+2+2+2} = b^8 = b^{2\times4}$

4. $(b^5)^3 = b^{5\times3} = b^{15}$

$$\boxed{(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p}$$

De macht van het product $a \cdot b$ is gelijk aan het product van de twee machten a^p en b^p .

Voorbeelden

1. $(4\times3)^2 = (4\times3)(4\times3) = 4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$

2. of eerst uitrekenen wat tussen de haakjes staat $(4\times3)^2 = 12^2 = 144$

3. $(5 \cdot a)^3 = (5 \cdot a)(5 \cdot a)(5 \cdot a) = 5^3 \cdot a^3 = 125 \cdot a^3$

4. $(a \cdot c)^3 = a^3 \cdot c^3$

5. $(2 \cdot b)^a = 2^a \cdot b^a$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$$

De macht van het quotiënt $\frac{a}{b}$ is gelijk aan het quotiënt van de machten a^p en b^p.

Voorbeelden

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

2. $\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{7^2}{8^2} = \frac{49}{64}$

3. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a\cdot a}{b\cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$

4. $\left(\frac{3}{b}\right)^4 = \frac{3^4}{b^4} = \frac{81}{b^4}$

Opgaven

1. Bereken:

   a. $\frac{6^7}{6^5}$ b. $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ c. $6\cdot 2^2\cdot 2^3$ d. $\frac{7^5}{7^2\cdot 7^3}$

2. Vereenvoudig:

   a. $\frac{a^5 b}{a^2}$ b. $\left(\frac{b}{4}\right)^2$ c. $4\cdot b^7\cdot b^5$ d. $\left(7\cdot a^3\cdot b^4\right)^2$

De rekenregels gelden ook als de exponent negatief of gebroken is. (Als de exponent een breuk is, noemen we de exponent gebroken.)

Machten met negatieve exponenten

$$\frac{5^2}{5^3} = \frac{5\times5}{5\times5\times5} = \frac{1}{5}$$

Als we de rekenregel $a^p : a^q = a^{p-q}$ toepassen op $\frac{5^2}{5^3}$ krijgen we $\frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1}$.

Dus: $\frac{1}{5} = 5^{-1}$

$\frac{5^6}{5^8} = \frac{1}{5^2} = 5^{6-8} = 5^{-2}$ Dus: $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$

Het minteken voor de exponent 2 zegt dus dat we niet $5^2 = 25$ nemen, maar
$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.

Dus het omgekeerde van 25.

Algemeen geldt: $\boxed{\frac{1}{a^p} = a^{-p}}$

Voorbeelden

1. $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

2. $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

3. $\frac{1}{5^{-2}} = (5^{-2})^{-1} = 5^2 = 5\cdot5 = 25$

4. $\frac{2^{-3}}{3^2} = \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3^2} = \frac{1}{2^3\cdot3^2} = \frac{1}{72}$

5. $\frac{a^{-7}}{a} = a^{-7-1} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$ of $\frac{a^{-7}}{\mathrm{a}} = \frac{1}{a\cdot a^7} = \frac{1}{a^{1+7}} = \frac{1}{a^8}$

6. $\frac{a^3b^4}{a^{-2}b^7} = a^{3-(-2)}b^{4-7} = a^5b^{-3} = \frac{a^5}{b^3}$

7. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

8. $\left(\frac{2^{-2}}{3^3}\right)^{-1} = \frac{2^{-2\times(-1)}}{3^{3\times(-1)}} = \frac{2^2}{3^{-3}} = 2^2\cdot3^3 = 4\cdot27 = 108$

Opgaven

3. Bereken:

a. $\dfrac{6^5}{6^7}$ b. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$ c. $7^{-5} \cdot 7^8 \cdot 7^{-1}$ d. $\dfrac{2 \cdot 2^5}{2^2 \cdot 2^7}$

4. Vereenvoudig:

a. $\dfrac{a^5 b}{a^7}$ b. $\left(\dfrac{b}{4}\right)^{-2}$ c. $4 \cdot b^{-7} \cdot b^5$ d. $\left(2 \cdot a^{-3} \cdot b^4\right)^{-2}$

Machten met gebroken exponenten, wortels

Wortels zijn te schrijven als machten met gebroken exponenten.

$$\boxed{\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}}$$

Voorbeelden

1. Er geldt $\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{4} = 4$, in woorden; de tweedemachtswortel uit 4 is het niet-negatieve getal dat als het met zichzelf wordt vermenigvuldigd 4 geeft.
$\sqrt[2]{\ }$ wordt meestal geschreven als $\sqrt{\ }$. De 2 wordt meestal weggelaten.

2. Toepassen van de regel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ op $\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{4}$ geeft $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 4^1 = 4$

3. $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} = 4$ en er geldt ook $4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 4^1 = 4$
Dus $\sqrt[3]{4}$ geschreven als macht geeft $4^{\frac{1}{3}}$.

4. En zo is $\sqrt[4]{5^7} = (5^7)^{\frac{1}{4}} = 5^{7 \cdot \frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{4}}$.

Zoals eerder vermeld, nemen we bij de machten het grondtal positief.

Bij het gebruiken van negatieve getallen kunnen we een tegenspraak krijgen.

Voorbeeld

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$$

Maar ook $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$ (want $2^6 = 64$).

Als we dus negatieve getallen toestaan als grondtal, dan is bewijsbaar dat $2 = -2$ een ware bewering is.

Toepassen van de regel $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ op $\sqrt{ab}$ geeft

$$\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\ .$$

en toepassen van de regel $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ op $\sqrt{\frac{a}{b}}$ geeft

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ .$$

Er geldt dus: $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ \text{ en } \ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

Let op
De rekenregels gelden bij het vermenigvuldigen en delen van machten. Machten optellen en aftrekken kan alleen als zowel het grondtal als de exponent gelijk zijn. Dus als de machten gelijksoortig zijn.

Voorbeelden

1. $3^4 + 3^4 = 2 \cdot 3^4 = 162$
2. $6 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^3 = 10 \cdot 2^3 = 80$
3. $7a^4 - 2a^4 = 5a^4$
4. $a^6 + a^6 = 2a^6$
5. $a^2 + a^3$ kan niet verder worden vereenvoudigd

Opgaven

5. Bereken:

a. 5^3

b. $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$

c. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$

d. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$

e. $\frac{3^{-2} \cdot 3^{-3}}{3^{-7}}$

f. $\frac{3^2}{5}$

g. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

h. $\frac{1^5}{3}$

i. $\frac{4^2}{2^{-3}}$

j. $\left(\frac{3^{-2}}{5^2}\right)^{-1}$

6. Schrijf als macht en vereenvoudig zo mogelijk:

a. $\sqrt[3]{7}$ c. $\sqrt[3]{3^6 a}$ e. $\sqrt[5]{p}$

b. $\sqrt[7]{13}$ d. $\sqrt[4]{6^3}$ f. $\sqrt[3]{p^2}$

7. Bereken:

$\sqrt[p]{q^a}$ voor $a = 9, p = 3, q = 2$

8. Vereenvoudig (schrijf als één macht):

a. $\dfrac{3^{-2} \cdot 3^6}{3^5 \cdot 3^{-4}}$ c. $\dfrac{4^{12} : 4^7 \cdot 4^5}{(4^2)^3}$

b. $\dfrac{a^2 \cdot a^6}{a^5 \cdot a^{-4}}$ d. $\dfrac{b^2 : b^5}{b^{-7} \cdot b^3}$

9. Gegeven is dat $7^n = \dfrac{7^3 : 7^5 \cdot (7^2 \cdot 7^3)^4}{7^{10} \cdot 7^6}$.

Bereken *n.*

10. Vereenvoudig en schrijf zonder negatieve exponenten.

a. $(a^3 \cdot b^2)^4 \cdot b^5 \cdot a^{-17}$ c. $\dfrac{a^2 \cdot b^{-1}}{a^3 \cdot b}$

b. $(a^{-2} \cdot b^4)^3 \cdot a^3 \cdot b^7$ d. $\dfrac{(\mathrm{a}^5 \cdot \mathrm{b}^{-2})^{-6} \cdot a^9}{a^0 \cdot b^9}$

11. Vereenvoudig en schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten:

a. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$ c. $\left(\dfrac{5^3}{5^4}\right)^{-2} \cdot a^{-\frac{2}{3}}$ e. $(5^{-1}a^2)^{-3} \cdot a^{\frac{1}{7}} \cdot b^{\frac{3}{11}}$

b. $a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{5}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$ d. $\dfrac{a^2 \cdot a^5}{4^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}}}$ f. $4^2 \cdot a^2 \cdot \dfrac{4^{-5}}{a^{-7}}$

1.4 Procenten

Bij deze paragraaf is de rekenmachine toegestaan!

Het rekenen met procenten komt in de praktijk veel voor. Voor het berekenen van een percentage is het nodig om te weten waar het percentage van wordt genomen. Datgene waar het percentage van genomen wordt, wordt op 100% gesteld.

Voorbeelden

1. Hoeveel is 5% van 200 euro?

   5% is $\frac{5}{100}$ deel van 200 euro. Dus $\frac{5}{100} \times 200 = 10 \text{ euro}$

2. Hoeveel procent is 12 van 48?

   12 is het $\frac{12}{48} = 0,25$ deel van 48. Dus 25%.

3. De telefoonrekening bedraagt € 78,20. Daar moet nog 19% BTW over betaald worden. Hoeveel bedraagt de totale rekening?

   Bij het bedrag van € 78,20 komt nog 19/100 = 0,19 deel BTW bij. De totale rekening is dus 119% van de rekening zonder BTW. De totale rekening wordt
   $1 \times 78,20 + \frac{19}{100} \times 78,20 = 1,19 \times 78,20 = 93,06$ euro.

4. Een mobiele telefoon die normaal € 84,00 kost, wordt verkocht met 15% korting. Hoeveel moet je er nu voor betalen?
   De telefoon wordt voor $(100-15)\% = 85\%$ van de oude prijs verkocht.
   De nieuwe prijs wordt dus $0,85 \times 84 = 71,40$ euro.

5. Een fles wijn van Chateau Rosé van 2,69 euro wordt afgeprijsd naar 2,32 euro. Hoeveel procent korting wordt er gegeven?
   De nieuwe prijs is $\frac{2,32}{2,69} = 0,8625$ deel van de oude prijs. De nieuwe prijs is dus 86,25% van de oude prijs. De korting is 100-86,25=13,75%.

6. Op de telefoonrekening staat dat er € 23,20 moet worden betaald aan BTW. Hoe hoog zijn de telefoonkosten zonder BTW?
   19% van de telefoonkosten is € 23,20 dus $\frac{23,2}{19} \times 100 = 122,11$ euro.

7. Een dvd-speler wordt in de winkel aangeboden met 20% korting. De prijs is nu € 132,80. Wat is de oorspronkelijke winkelwaarde van deze dvd-speler?
   80% (0,80 deel)van de winkelwaarde is 132,80 dus de oorspronkelijke winkelwaarde is
   $\frac{132,8}{0,8} = 166$ euro.

Zoals uit de voorbeelden hierboven blijkt kun je percentages berekenen aan de hand van een vermenigvuldiging. Je kunt bovenstaande voorbeelden ook uitrekenen door eerst één procent uit te rekenen en vervolgens het juiste percentage. Over het algemeen is dat een omslachtiger methode, zeker bij de berekeningen in de financiële rekenkunde.

Opgaven

1. Bereken:

a. 6% van 4000	d. 32% van 300
b. 25% van 600	e. 100% van 300
c. 50% van 4200	f. 250% van 50

2. Hoeveel procent is:

a. 40 van 100	d. 36 van 60
b. 77 van 220	e. 21 van 105
c. 18 van 72	f. 60 van 250

3. De prijs van benzine is aan schommelingen onderhevig. In een bepaald land steeg de prijs met 5% en daalde toen weer met 5%. Met hoeveel procent is de prijs in totaal toe- of afgenomen?

4. Product A kost € 40,- en product B € 52,-.

   a. Hoeveel procent kost B meer dan A?

   b. Hoeveel procent kost A minder dan B?

5. In de uitverkoop kocht Jaap een broek met 25% korting. De broek kostte toen nog € 48,–. Wat was de oorspronkelijke prijs?

6. Aan het begin van het jaar 2000 telde de provincie Overijssel 1.077.625 inwoners. Aan het begin van het jaar 2007 was dit aantal met 3,6% gestegen.
   Hoeveel inwoners telde Overijssel aan het begin van 2007?

Samengestelde interest

Je stort op een spaarrekening een bedrag van 1000 euro. De bank geeft 3% rente (interest) op jaarbasis.

Na een jaar heb je $1\times 1000+0,03\times 1000=1,03\times 1000=1030$ euro op de rekening.

Het bedrag 1000 is gegroeid met de factor 1,03 tot 1030 euro. Als je de ontvangen 30 euro rente op de spaarrekening laat staan, krijg je het jaar daarop ook rente over die 30 euro. Dus je krijgt rente over het beginkapitaal en over de gekregen rente. We noemen dat samengestelde interest, oftewel rente op rente.

Na twee jaar is het bedrag gegroeid tot

$$1\times 1030+0,03\times 1030=1,03\times 1030=1,03\times 1,03\times 1000=1,03^2\times 1000=1060,90$$

euro.

In twee jaar is het bedrag gegroeid met de factor $1,03^2=1,0609$.

Na drie jaar is het bedrag gegroeid tot 1092,73 euro.

Door de samengestelde interest groeit het bedrag niet lineair (met een vast bedrag), maar exponentieel (met een vast percentage van 3%).

In formule

$K=1000\times 1,03^n$ $\quad K=$ bedrag op tijdstip n

n in jaren, n=0 in het jaar van storten

De jaarlijkse groeifactor is 1,03.

De groeivoet is $1,03-1=0,03$

Het percentage $0,03\times 100=3$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{groeivoet=groeifactor-1}\\ \text{percentage=groeivoet}\times 100\end{array}}$$

In twee jaar is het bedrag op de rekening toegenomen met $(1,0609-1)\times 100\%=6,09\%$.

Ga zelf het verband tussen groeifactor en percentage na in de eerder gegeven voorbeelden.

Voorbeeld

In een zeker land groeit het inwonertal ieder jaar met 5,3%. Na 20 jaar is het inwonertal dan gegroeid met de factor $1,053^{20}=2,8091$.

De bevolking is met $(2,8091-1)\times 100\%=180,91\%$ toegenomen.

Opgaven

7. Iemand stort € 15000,- op een spaarrekening, waarop 2,8% rente wordt gegeven. Bereken het saldo na precies 7 jaar.

8. Hans leent Annelies een bedrag voor twee jaar uit. Na twee jaar zal Annelies 270,40 euro terugbetalen. Welk bedrag heeft Annelies geleend in het geval er met 4% rente per jaar wordt gerekend.

9. Een winkelier geeft op een artikel 20% korting. Een week later verhoogt hij de prijs van dat artikel met 20%. Arjen beweert dat daarna de prijs van dit artikel even hoog is als vóór de korting. Laat met een berekening zien of Arjen gelijk heeft.

10. De prijs van een artikel is veranderd met de factor 0,945. Met hoeveel procent is de prijs gestegen of gedaald?

11. Een kapitaal van € 8.500,- heeft 15 jaar op een spaarrekening gestaan tegen samengestelde interest. De eerste 5 jaar vergoedde de bank 5% per jaar, daarna 5 jaar lang 3% per jaar en vervolgens de laatste 5 jaar 3,5% per jaar.

    Bereken het eindkapitaal na precies15 jaar.

12. Men wil de prijs van een artikel met 15 % verlagen. Met welk percentage moet de afzet stijgen op de omzet toch met 8 % te laten toenemen?
    De omzet = prijs x afzet

2. Eerstegraads functies en vergelijkingen

2.1 Een eerstegraadsvergelijking met één onbekende

$2x+8=6$ is een eerstegraadsvergelijking.

Eerstegraads, omdat de hoogste macht van de onbekende x één is (in de term $2x$).
Vergelijking, omdat via het "$=$" teken $2x+8$ en 6 aan elkaar gelijk worden gesteld. Of: met elkaar worden vergeleken.

Zo wordt $x^2+4x+4=5$ een tweedegraads vergelijking genoemd. De hoogste macht van x die in de vergelijking voorkomt is twee (in de term x^2).

De eerstegraads vergelijking $2x=8$ is een bewering die waar is als $x=4$. Het vinden van de waarde $x=4$ wordt het oplossen van de vergelijking genoemd.

Bij eerstegraadsvergelijkingen met als onbekende x is de standaardmethode voor het vinden van de waarde van x die de vergelijking kloppend maakt de volgende:

1. Alle termen met x naar een kant van het "$=$" teken te brengen.
2. Alle andere termen naar de andere kant van het "$=$" teken brengen
3. De onbekende x vrijmaken, dat wil zeggen herschrijven in de vorm van x **=**….

In algemene vorm:

$$\boxed{ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}} \qquad \text{met } a \neq 0$$

Voorbeeld

$$3x+4=2-x \Leftrightarrow$$
$$3x+x=2-4 \Leftrightarrow$$
$$4x=-2 \Leftrightarrow$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

Staan er haakjes in de vergelijking, dan worden die eerst weggewerkt.

Voorbeeld

$$2(x+5)+x=6-(x-1)\Leftrightarrow$$
$$2x+10+x=6-x+1\Leftrightarrow$$
$$2x+x+x=6-10+1\Leftrightarrow$$
$$4x=-3\Leftrightarrow$$
$$x=-\frac{3}{4}$$

Staan er breuken in de vergelijking, dan is het verstandig om deze eerst weg te werken.

Voorbeelden

1. $x+\frac{1}{3}x+1=\frac{1}{2}(x+4)$

   Om de noemers 2 en 3 weg te werken moet je in dit geval alles (het rechter- en linkerlid) met 6 vermenigvuldigen.
   Dit geeft:

   $$6x+2x+6=3(x+4)\Leftrightarrow$$
   $$8x+6=3x+12\Leftrightarrow$$
   $$5x=6\Leftrightarrow$$
   $$x=\frac{6}{5}$$

2. $\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}(1-x)$

   Vermenigvuldigen met 12:

   $$6(x+1)=4+3(1-x)\Leftrightarrow$$
   $$6x+6=4+3-3x\Leftrightarrow$$
   $$9x=1\Leftrightarrow$$
   $$x=\frac{1}{9}$$

Opgaven

1. Los de volgende vergelijkingen op:

a. $4x+6=x+21$

b. $7x-4=3x-28$

c. $-4x+23=3x-5$

d. $25-3x=-5x+35$

e. $x=16(x+7)$

f. $3(2x-8)=2(6+x)$

g. $1-7(1-x)=6+x$

h. $-(x+4)+6(x-3)=x+2$

2 Los de volgende vergelijkingen op:

a. $3(x+4)-2(6-x)=5(2x+4)-3(6-2x)$

b. $5(x+3)-(x-4)=-2(3x+2)+6(x+1)$

c. $-2(2-3x)+(x-3)=-3(5x-1)+34$

d. $5+7(2x+1)=-2(2-x)$

e. $6(1-x)+5=2x+3$

f. $x-7x+5=6+4(5-2x)$

3. Los de volgende vergelijkingen op (werk eerst de breuken weg):

a. $\frac{1}{2}(x+9)+4=\frac{1}{3}(x-2)$

b. $2x-2=\frac{1}{5}x+1$

c. $-(3-x)=\frac{1}{4}(x+1)+1$

d. $\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x=3$

e. $\frac{1}{7}(5x+4)=\frac{1}{2}(4-x)$

f. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=1+\frac{1}{5}x$

g. $4+x=\frac{1}{6}(x+1)$

h. $2(3x+2)+\frac{1}{2}(5-x)=\frac{13}{2}$

4. Los de volgende vergelijkingen op:

a. $4x+p-3=2(x-p)+3$

b. $x+4(2+p)=16$

c. $3x-a+2(x+4)=11$

d. $\frac{1}{2}(x+p)=\frac{1}{4}(x+2p)$

2.2 Twee eerstegraads vergelijkingen met twee onbekenden

$x+y=4$ is een vergelijking met twee onbekenden: x en y. De vergelijking is in een assenstelsel te tekenen als een rechte lijn.

De vergelijking heeft oneindig veel paren (x,y) die aan de vergelijking voldoen, namelijk alle paren (x,y) die op de lijn liggen.

Zo voldoen (0,4), (4,0), (1,3) aan de vergelijking.
$(0,4)$ invullen in $x+y=4$ geeft $0+4=4$ Ga voor (4,0) en (1,3) na dat ze ook voldoen aan de vergelijking.

Aan de vergelijking $2x-3y=3$ voldoen ook oneindig veel paren (x,y). Zoek zelf paren (x,y) die aan deze vergelijking voldoen.

Beide vergelijkingen $x+y=4$ en $2x-3y=3$ hebben een gemeenschappelijke oplossing (x,y): het snijpunt van de twee lijnen.
Het zoeken van de waarden x en y, die aan beide vergelijkingen voldoen is het oplossen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$$

Voor het oplossen van stelsels vergelijkingen bekijken we twee methoden.

Substitutiemethode
Een van beide vergelijkingen schrijven we als $x=\ldots$ of $y=\ldots$ (dit heet: een variabele *vrij maken*). Vervolgens substitueren we deze in de andere vergelijking.

Voorbeeld

Los op: $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$

x vrijmaken uit $x+y=4$ geeft $x=4-y$
x invullen in $2x-3y=3$ geeft $2(4-y)-3y=11$
$\Rightarrow 8-2y-3y=3 \Rightarrow -5y=-5 \Rightarrow y=1$
$y=1$ invullen in een van de twee vergelijkingen.
$y=1$ invullen in $x+y=4$ geeft $x+1=4 \Rightarrow x=3$
Het snijpunt is $(x,y)=(3,1)$.

Eliminatiemethode
We willen nu een van de onbekenden wegwerken (elimineren).

We vermenigvuldigen de vergelijkingen met getallen zodat de coëfficiënten (de getallen voor de onbekenden) van een van de onbekenden gelijk of tegengesteld worden.

Vervolgens de beide vergelijkingen bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.

Voorbeeld

Los op: $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} x+y=4 & 2\times \\ 2x-3y=3 & 1\times \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|} 2x+2y=8 \\ 2x-3y=3 \end{array}_{-} \Rightarrow 5y=5 \Rightarrow y=1$$

$y=1$ invullen in een van de twee vergelijkingen geeft $x=3$
Het snijpunt is $(x,y)=(3,1)$.

Zorg er bij de eliminatiemethode voor dat de x en y in de vergelijkingen onder elkaar staan.

Voorbeeld

Los op: $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 5x=2y+4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 2x+3y=13 \\ 5x=2y+4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 2x+3y=13 & \times 2 \\ 5x-2y=4 & \times 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|} 4x+6y=26 \\ 15x-6y=12 \end{array}_{+} \Rightarrow 19x=38 \Rightarrow x=2$$

x invullen in $2x+3y=13$ geeft $y=3$

Het punt (2,3) is het snijpunt van de twee lijnen.

Een stelsel heeft één oplossing, geen oplossing of oneindig veel oplossingen.

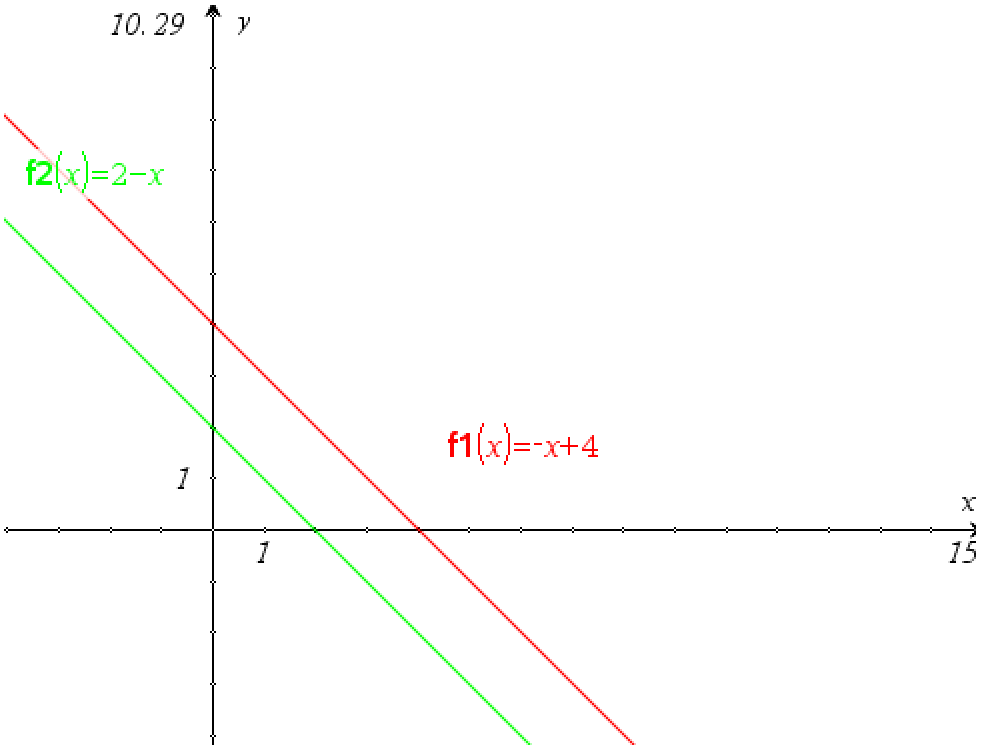
Bij één oplossing hebben de twee lijnen (die de twee vergelijkingen representeren) één snijpunt gemeen, bij geen oplossing lopen de twee lijnen evenwijdig en bij oneindig veel oplossingen vallen ze samen.

Voorbeelden:

1. Los op: $\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} x+y=4 \\ x+y=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|} x+y=4 \\ x+y=2 \end{array}_{-} \Rightarrow 0=2$$

Geen oplossing. Het stelsel is strijdig. De lijnen lopen evenwijdig.



2. Los op: $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} x+y=2 & \cdot 1 \\ 2x+2y=4 & \cdot \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=2 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=2 \end{array}\right|_{-} \Rightarrow 0=0$$

Oneindig veel oplossingen. Het stelsel is afhankelijk. De lijnen vallen samen.

Opgaven

1. Ga voor de onderstaande twee stelsels na of ze afhankelijk of strijdig zijn.

   a. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+4=-3y \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+5=-3(y-2) \end{cases}$

2. Zijn de paren $(\frac{1}{12},\frac{5}{12}),(\frac{1}{4},\frac{1}{6})$ en $(\frac{1}{4},-\frac{1}{6})$ oplossingen van het hier onderstaande stelsel vergelijkingen?

   $\begin{cases} 3x+2y=1\frac{1}{12} \\ 4x-y=\dfrac{7}{6} \end{cases}$

3. Los *x* en y op, kies zelf of je de substitutie- of eliminatiemethode gebruikt:

   a. $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-2y=-6 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 3-2x=x-2y+11 \\ y=3+x \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 2x+7=3y-6 \\ 4y=-5x+2 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} 2x-5y=\frac{3}{4} \\ 3x+4y=4 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} 6x+9y=12 \\ 6x-4y=12 \end{cases}$

4. Voor het repareren van de wasmachine heeft de familie Vreugdbroek de keuze uit twee reparateurs. Reparateur A berekent geen voorrijkosten en vraagt 37,50 euro per uur. Reparateur B rekent 50 euro aan voorrijkosten en vraagt 25 euro per uur.

   a. Geef de vergelijkingen waarmee de reparatiekosten in euro's te berekenen zijn.

   De familie schat in dat de reparatie 3 uur zal duren.

   b. Welke reparateur zullen ze kiezen?

   c. Bij welke reparatietijd zijn beide reparateurs even duur?

5. Op een markt met volledige mededinging gelden voor een bepaald product de volgende vraag- en aanbodfuncties:

   $q_a = 5p + 2 \text{ en } q_v = -3p + 34$

   waarbij q_a en q_v aantallen producten in duizendtallen voorstellen; *p* is de prijs in euro's.

De evenwichtsprijs is de prijs waarbij de vraag gelijk is aan het aanbod. $(q_a = q_v)$

a. Bereken de evenwichtsprijs en hoeveelheid.

De overheid stelt de prijs van het product vast op € 3,50.

b. Ga na of er bij deze prijs sprake is van een aanbod- dan wel een vraagoverschot, en bereken de grootte van dit overschot.

c. Met hoeveel is de totale opbrengst (prijs $\times$ hoeveelheid) van dit product afgenomen ten opzichte van de evenwichtssituatie?

2.3 Eerstegraads functies

De algemene vorm van een eerstegraads functie is:

$$\boxed{f(x) = ax + b \quad \text{of} \quad y = ax + b \qquad \text{met } a \neq 0}$$

Een *eerstegraads* functie wordt ook wel een *lineaire* functie genoemd.

Voorbeelden

1. $a = -2,\ b = 6 \Rightarrow f(x) = -2x + 6$

2. $a = 3,\ b = 0 \Rightarrow f(x) = 3x$

3. Het functievoorschrift $f(x) = 2x + 3$ geeft aan hoe het getal x is gekoppeld aan $f(x)$.
   Bij $x = 1$ hoort $f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$.
   $x = 1$ heet het origineel en $f(1) = 5$ het beeld.

De verzameling van alle originelen heet het domein en de verzameling van alle beelden het bereik van de functie.

Voor een functie geldt dat bij ieder origineel ten hoogste één beeld hoort.

De grafiek van een eerstegraads functie is een rechte lijn. Om de lijn te tekenen of een functievoorschrift op te stellen is het voldoende om twee punten op de lijn te kennen of een punt en de richting van de lijn.

De richting van de lijn wordt uitgedrukt in de richtingscoëfficiënt (rc) of hellingsgetal.

Omdat er bij een eerstegraads functie sprake is van constante groei kunnen we de richting van de lijn definiëren als de verhouding tussen de toename van y en de toename van x in twee willekeurige punten.

$$\boxed{\text{r.c.}=\frac{\text{het verticale verschil van twee punten op de lijn}}{\text{het horizontale verschil van twee punten op de lijn}}=\frac{\text{toename van } y}{\text{toename van } x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

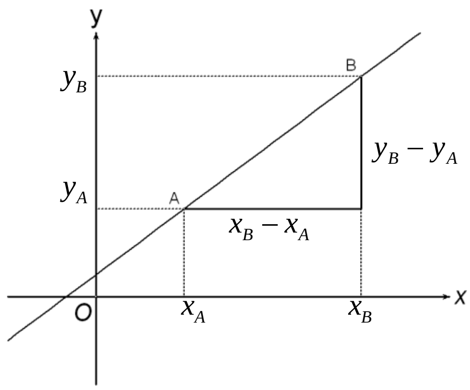
Bij een stijgende lijn is bij een positieve toename van x, de toename van y ook positief; de richtingscoëfficiënt is positief.

Bij een horizontale lijn neemt y niet toe of af. De toename van y ($y_2 - y_1 = \Delta y$) is nul; de richtingscoëfficiënt is nul.

Bij een dalende lijn daalt de y -waarde als x toeneemt. Bij een positieve toename van x is de toename van y negatief; de richtingscoëfficiënt is negatief.

Samenvatting

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{rc} > 0 \leftrightarrow \text{stijgende lijn}\\ \text{rc} = 0 \leftrightarrow \text{horizontale lijn}\\ \text{rc} < 0 \leftrightarrow \text{dalende lijn}\end{array}}$$

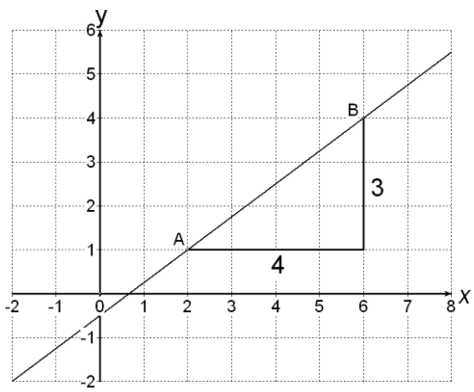


Van de lijn in de grafiek hiernaast is de richtingscoëfficiënt uitgedrukt in de toename tussen de punten A en B. De richtingscoëfficiënt is gelijk aan:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Voorbeeld

$$\text{rc} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{4}$$



In de vergelijking $y = ax + b$ is het getal a gelijk aan de rc en is het getal b het punt waar de lijn de y-as snijdt. Ga dit na.

$$\boxed{\text{Het opstellen van de vergelijking } y = ax + b}$$

1. Indien een punt en de rc is gegeven. Bepaal de vergelijking van de lijn door het punt $(-2{,}3)$ met richtingscoëfficiënt -4.

   $y = ax + b$

   r.c. is $a = -4$ Invullen in $y = ax + b$ geeft $y = -4x + b$.

   Invullen van het punt $(-2,3)$ in de vergelijking geeft: $3 = -4 \cdot -2 + b \Rightarrow b = -5$

   a en b invullen in de vergelijking geeft: $y = -4x - 5$.

2. Indien twee punten zijn gegeven. Bepaal de vergelijking van de lijn door de punten A(6,4) en B(2,1).

$$y = ax + b$$

$$r.c. = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4-1}{6-2} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + b$$

Invullen van (2,1) in de vergelijking geeft: $1 = \frac{6}{4} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

of

$$y = ax + b$$

Invullen van de twee punten in de vergelijking geeft

$$\left.\begin{array}{l}(2,1) \Rightarrow 1 = 2a + b \\ (6,4) \Rightarrow 4 = 6a + b\end{array}\right\} \Rightarrow \text{aftrekken van elkaar geeft } -3 = -4a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \text{y} = \frac{3}{4}\text{x} + b$$

Invullen van (2,1) in de vergelijking geeft: $1 = \frac{6}{4} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

Opgaven

1. Waarom is de vergelijking $y = 5$ een functie en de vergelijking $x = 5$ niet?

2. Schrijf de volgende vergelijkingen in de standaardvorm $y = ax + b$.

   a. $4(y+1) = 2(x-1) + 5$

   b. $4x - 6y = -3(-y+1) + x$

3. Bepaal voor de volgende functies *f*(4), *f*(-3), *f*(a) en *f*(1+a).

   a. $f(x) = 3x - 7$

   b. $f(x) = -2x + 5$

4. Bereken van de volgende lijnen de richtingscoëfficiënt.

a. $7x+4y=6$

b $-x+3y=1$

5. Geef de vergelijking van de lijn door:

a. $(3,4)$ en r.c. $=2$

b. $(-1,4)$ en r.c.$=-5$

6. Stel een vergelijking op van de lijn door de punten:

a. (20,40) en $(-10,-5)$

b. (3,14) en (2,10)

7. Op de lijn $y=2x-5$ liggen de punten $(a,1),(-2,b),(c,c)$ en $(d,-d)$.

Bereken a, b, c en d.

8. Gegeven zijn de lijnen $x-2y=4$ en $3x=-y+6.$

a. Geef een vergelijking van de lijn door het punt (2,7) die evenwijdig loopt aan de lijn $x-2y=4$.

b. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de twee lijnen.

9. Gegeven is $y=0,7x+5$.

a. Bereken Δx als $\Delta y=0,21$.

b. Bereken Δy als $\Delta x=0,4$.

10. Gegeven is de volgende vraag- en aanbodfunctie voor een bepaald product:

$$q_v = -2,5p + 115$$
$$q_a = p + 10$$

met p in euro's per stuk en q in duizendtallen.

a. Leg uit waarom de richtingscoëfficiënt van een vraagfunctie negatief is.

b. Bereken de evenwichtsprijs en -hoeveelheid. $(q_a = q_v)$

De prijs wordt gesteld op € 35,00 per stuk.

c. Bepaal of er een aanbod- of vraagoverschot is en bereken de omvang ervan.

11. Een autoverhuurbedrijf hanteert de volgende twee tarieven:

Tarief 1 € 83,00 per dag (inclusief 100 km per dag) plus € 0,43 per km.

Tarief 2 (huurtijd 4 dagen of langer) € 97,- per dag, alle kilometers vrij.

Iemand heeft voor drie dagen een auto nodig.

a. Geef de functies die bij de tarieven horen.

b. Bereken bij welk aantal kilometers tarief 2 goedkoper wordt.

3. Tweedegraads functies en vergelijkingen

3.1 Tweedegraads vergelijkingen

De algemene vorm van een tweedegraads vergelijking is:

$ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$

Voor het oplossen van een tweedegraads vergelijking wordt de vergelijking eerst herleid op nul.

Bepaalde typen tweedegraads vergelijkingen kunnen opgelost worden door de vergelijking direct te ontbinden in factoren.

Vervolgens wordt de eigenschap $\boxed{A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ of } B = 0}$ gebruikt om de oplossingen te bepalen.

Hieronder volgen drie verschillende typen speciale tweedegraads vergelijkingen en hun oplossingsmethode. Daarna komt een algemene oplossingsmethode voor het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen.

TGV1

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^2 + bx = 0 \text{ en } (a \neq 0) \Leftrightarrow x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } ax + b = 0 \Leftrightarrow \\ x = 0 \text{ of } ax = -b \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = \dfrac{-b}{a} \end{array}}$$

Voorbeelden

1. $5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow$

$$x(5x+3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \text{ of } 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \text{ of } x = -\frac{3}{5}$$

2. $2x^2 + 3x = -x^2 + x \Leftrightarrow$

$$2x^2 + x^2 + 3x - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$x(3x+2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x=0 \text{ of } 3x = -2 \Leftrightarrow$$
$$x=0 \text{ of } x = -\frac{2}{3}$$

TGV2

$$ax^2 - c = 0 \ \left(\frac{c}{a} \geq 0\right) \Leftrightarrow ax^2 = c \Leftrightarrow x^2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Voorbeelden

1. $3x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow$

   $3x^2 = 27 \Leftrightarrow$

   $x^2 = 9 \Leftrightarrow$

   $x = 3$ of $x = -3$

2. $6x^2 - 5 = 2x^2 + 59 = 0 \Leftrightarrow$

   $6x^2 - 2x^2 - 5 - 59 = 0 \Leftrightarrow$

   $4x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow$

   $4x^2 = 64 \Leftrightarrow$

   $x^2 = 16 \Leftrightarrow$

   $x = 4$ of $x = -4$

TGV3

$ax^2 + bx + c = 0$

Links en rechts delen door a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Ontbinden in factoren met behulp van de som-product methode:

de getallen d en e zoeken waarvoor geldt: $d \cdot e = \frac{c}{a}$ en $d + e = \frac{b}{a}$.

Dan geldt: $(x+d)(x+e) = 0 \Leftrightarrow x = -d$ of $x = -e$

Voorbeeld

$x^2 + 8x + 15 = 0 \ \Rightarrow a = 1$

Met behulp van de som-product methode twee getallen zoeken waarvan tegelijkertijd de som 8 is en het product 15 is.

product 15	som 8	
1×15	$1 + 15$	
-1×-15	$-1 - 15$	
3×5	$3 + 5$	$\Rightarrow$ de ontbinding wordt $(x+3)(x+5) = 0$
-3×-5	$-3 - 5$	$\Leftrightarrow x = -3$ of $x = -5$

Algemene methode

Iedere tweedegraads vergelijking kan met de wortelformule (ook wel abc-formule) worden opgelost. De naam 'wortelformule' is gekozen doordat de formule de 'wortels' of 'oplossingen' oplevert van een tweedegraads vergelijking. Deze methode kost wel wat meer rekenwerk dan de methode die we gebruiken in de speciale gevallen TGV1, TGV2 en TGV3.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

met de wortel (abc-)formule: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

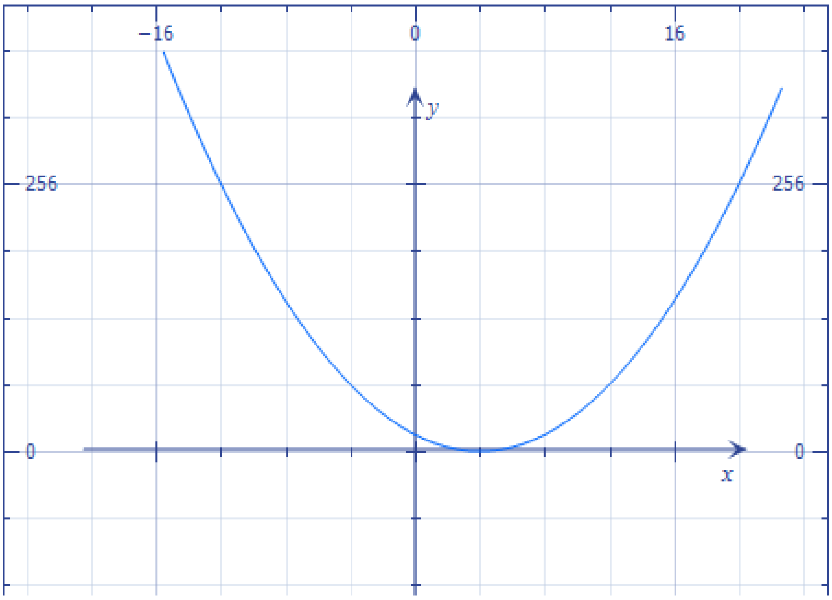
D = Discriminant = $b^2 - 4ac$

als D = $b^2 - 4ac > 0$ twee oplossingen

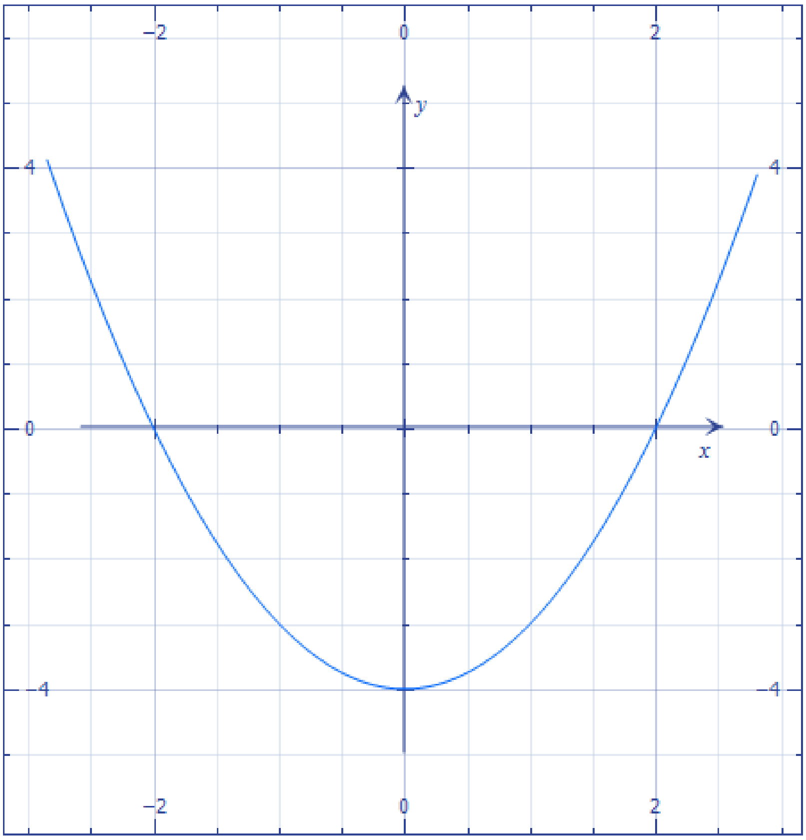
D = $b^2 - 4ac = 0$ een oplossing

D = $b^2 - 4ac < 0$ geen oplossing

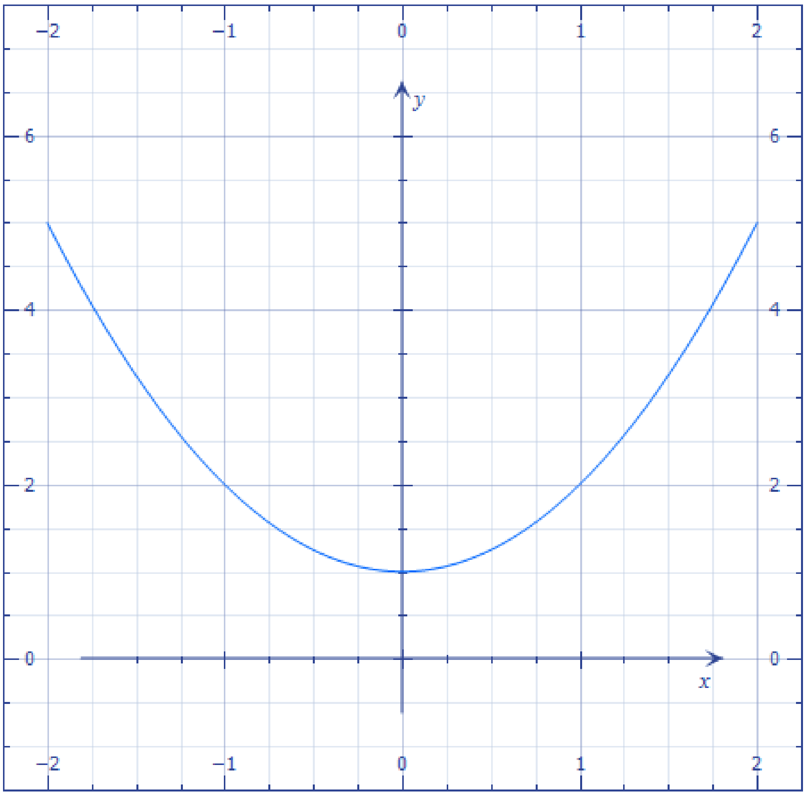
$y = x^2 - 8x + 16{:}\ D = 0 \ \rightarrow \mathit{een\ oplossing}$



$y = x^2 - 4 : D > 0 \; \rightarrow \textit{twee oplossingen}$



$y = x^2 + 1 : D < 0 \; \rightarrow \textit{geen oplossing}$



Voorbeelden

1. $3x^2 - 7x - 40 = 0 \Rightarrow a = 3, b = -7, c = -40$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 3 \times -40}}{2 \times 6} = \frac{7 \pm \sqrt{529}}{12} = \frac{7 \pm 23}{12}$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ of } x = 2\tfrac{2}{3}$$

2. $x^2 - 8x - 10 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 6 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -10, c = -6$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \times 1 \times -6}}{2 \times 1} = \frac{10 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{10 \pm 5}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7\tfrac{1}{2} \text{ of } x = \frac{5}{2} = 2\tfrac{1}{2}$$

$2x^2 + 5x + 5 = 0 \Rightarrow a = 2, b = 5, c = 5$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \times 2 \times 5}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-36}}{4}$$

$-36 < 0 \Rightarrow$ geen oplossing

Opgaven

1. Los de hierboven gegeven voorbeelden die niet met de wortelformule (abc-formule) zijn opgelost, nogmaals op met de wortelformule (abc-formule).

2. Los op met de som-product methode:

a. $x^2 + 2x - 15 = 0$

b. $x^2 + 2x - 8 = 0$

c. $x^2 + 10x + 24 = 0$

d. $x^2 + 12x + 27 = 0$

e. $x^2 - 6x + 9 = 0$

f. $x^2 - 10x + 9 = 0$

3. Bereken de oplossingen van:

a. $3x^2 + 8 = 0$

b. $3x^2 - 2x = 5(x + 8)$

c. $-2x^2 + 3x - 1 = 0$

d. $4x^2 - 7x = 2$

e. $x^2 + 6x = -4$

f. $\tfrac{1}{2}x^2 + 2 = 0$

g. $-2x^2 + 4x - 1 = -3$

h. $\tfrac{1}{4}x^2 + 6x + 5 = 4x + 2$

3.2 Tweedegraads functies

De algemene vorm van een tweedegraads functie is:

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \text{ of } y = ax^2 + bx + c}$ met $a \neq 0$

Voorbeelden

1. $a = 1, b = 0, c = 0 \Rightarrow f(x) = x^2$
2. $a = -1, b = 2, c = 1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 1$

We bespreken nu de belangrijkste eigenschappen van tweedegraads functies. De grafiek van een tweedegraads functie is een parabool. De a in de kwadratische term ax^2 geeft aan of het een dal-$(a > 0)$ of bergparabool $(a < 0)$ is.

Een parabool heeft een symmetrieas; de verticale lijn door zijn top. De vergelijking van deze verticale lijn is $x = -\dfrac{b}{2a}$. De top van de parabool bevindt zich op deze symmetrieas.

De grafiek snijdt de x-as als $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. De snijpunten zijn te berekenen met de wortel-(of abc-) formule. (Zie paragraaf Tweedegraads vergelijkingen.)

Samenvatting

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$

symmetrieas: $x = -\dfrac{b}{2a}$

$ax^2 + bx + c = 0$ voor $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Discriminant $D = b^2 - 4ac$ bepaalt het aantal snijpunten.

$D > 0 \Rightarrow$ 2 snijpunten

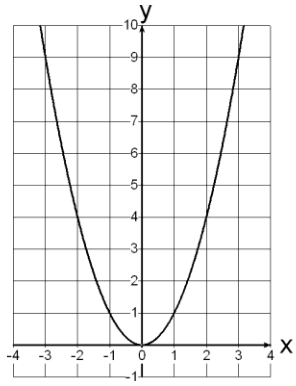
$D = 0 \Rightarrow$ 1 raakpunt

$D < 0 \Rightarrow$ geen snijpunten

$f(x)$ heeft een maximum als $a < 0$ en een minimum als $a > 0$.

$x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a}$

Voorbeelden



1. $f(x) = x^2$

$a = 1, b = 0, c = 0$

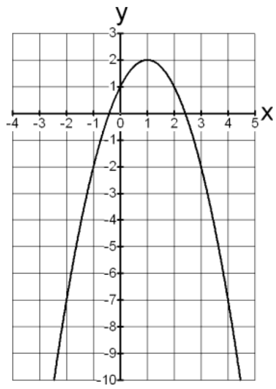
symmetrieas: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2} = 0$

snijpunten x-as: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

De grafiek raakt de x-as in $x = 0$

$a > 0 \Rightarrow \text{dalparabool} \Rightarrow \text{minimum}$

$x_{\min} = -\dfrac{b}{2a} = 0 \Rightarrow \text{ minimum } f(0) = 0^2 = 0$



2. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

$a = -1, b = 2, c = 1$

symmetrieas: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{-2} = 1$

snijpunten x-as:

$-x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times 1}}{2 \times (-1)} =$

$\dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2} =$

$= 1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \text{ of } x = 1 + \sqrt{2}$

$(\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2})$

$a < 0 \Rightarrow \text{ bergparabool } \Rightarrow \text{maximum}$

$x_{\max} = -\dfrac{b}{2a} = 1 \Rightarrow \text{ maximum } f(1) = -1^2 + 2 \times 1 + 1 = 2$

Opgaven

1. Waarom geldt $a \neq 0$ bij $f(x) = ax^2 + bx + c$?

2. Bepaal voor de grafiek van elk van de volgende functies:
   - de coördinaten van de top en zeg of er een maximum of minimum is;
   - indien aanwezig de snijpunten met de x-as;
   - het snijpunt met de y-as.

   $a(x) = x^2 - 3$ $\quad$ $b(x) = -(x-5)^2$

   $c(x) = (x-1)^2 - 3$ $\quad$ $d(x) = 3x^2 - 2$

   $e(x) = x^2 + 3x + 6$ $\quad$ $f(x) = -x^2 + 6x - 6$

   $g(x) = -2x^2 + 4$ $\quad$ $h(x) = 2x^2 + 3x + 1$

3. Bereken de snijpunten van $y = 4x^2 - 5x + 37$ en $y = 3x^2 + 13x - 40$

4. Gegeven is de functie: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 12$
   a. Bereken voor welke waarden van x geldt: $f(x) = 0$ en $f(x) = 8$;
   b. Bereken $f(0)$, $f(3)$ en $f(a+1)$.

5. Bereken de symmetrieas van de volgende functies.

   a. $f(x) = (x+3)(x-5)$
   b. $g(x) = (x-3)(x+5)$

6. Gegeven is een totale-opbrengstfunctie $\text{TO} = -12q^2 + 96q$

   a. Voor welke waarden van q heeft de functie betekenis?
   b. Bepaal de procentuele toename van de opbrengst als q toeneemt van 2 naar 3.

   Ook gegeven is een totale-kostenfunctie $\text{TK} = -6q^2 - 15$

   c. Voor welke waarde van q is de totale winst (= TO – TK) maximaal?

7. Een slijter koopt flessen wijn in, tegen een prijs van €10,- per fles. De afzet als functie van de prijs is: $q = 65 - 2,5p$
   met q als de afzet per jaar in duizenden flessen en p als de verkoopprijs in euro's.

   Om de flessen te kunnen opslaan huurt de slijter een opslagruimte voor € 40.000,- per jaar.

   a. Schrijf de totale omzet (TO)per jaar (in duizenden euro's) als functie van p .

b. Laat zien dat de uitdrukking voor de totale winst per jaar (in duizenden euro's) als functie van p te schrijven is als:

$$\text{TW}=-2{,}5p^2+90p-690$$

(TW=TO-TK, TK=totale kosten in duizenden euro's)

c. Bereken bij welke verkoopprijs per fles de jaarwinst maximaal zal zijn en geef de bijbehorende maximale winst.

8. Wikke, een talentje in de dop, trapt een bal weg volgens een parabool met de vergelijking

$$y=-\frac{1}{50}x^2+0{,}6x \qquad \text{met } x \text{ en } y \text{ in meters.}$$

a. Hoever trapt hij de bal en hoe hoog komt de bal maximaal?

Hij trapt nog een keer. Deze keer volgens een parabool met de vergelijking

$$y=-\frac{1}{4}x^2+ax-8a+21 \qquad \text{met } x, y, a \text{ in meters}$$

De bal bereikt nu een maximale hoogte van 5 meter.

b. Bereken a.

9. Een kunstenares berekent de prijs van haar werk met de volgende formule:

$$p=2{,}5\times o \qquad p=\text{prijs in euro's, } o\text{=oppervlakte in cm}^2$$

Van een van haar werken is de omtrek 220 cm.

Ze ontvangt voor dat werk € 7.500,-.

a. Bereken de lengte en breedte van het werk.

b. Bij welke lengte en breedte levert het werk de maximale waarde op?

Antwoorden

1 Basisvaardigheden

1.1 Terminologie en algemene algebraregels

1. $(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

2.
a. $a+b-2c-4d+5e$
b. $3x+7y$
c. $11y$
d. $1+3x-5y$
e. $14x-3y$
f. $-3a-7b+30ab-18b^2$
g. $15-11x+47y$
h. $40-17y$
i. $-5-7a$
j. $39-3a+12b$

3.
a. $12x-24$
b. $-24-2a+a^2$
c. $28+4ab$
d. $-16+4x+2x^2$
e. $44-15a+a^2$
f. $-28+13a+6a^2$
g. $-14+6b$
h. $6-a-2a^2$
i. a^2-100
j. $4a^3-8a^2$
k. $x^2-2x-15$
l. $-26a+28ab-2ab^2$

4.
a. 26
b. 24
c. 16
d. -240
e. 48
f. 576
g. -576

5. a. 25 b. $-2\ \dfrac{1}{2}$ c. $3\ \dfrac{1}{2}$ d. $2(-10-3(4))(15)=2(-22)(15)=-660$

1.2 Breuken

1\.

a. $\frac{1}{3}$ d. 5 g. $\frac{1}{7}$ j. $-\frac{1}{4}$ m. 5

b. $\frac{1}{11}$ e. $\frac{5}{2}$ h. -1 k. 5 n. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{9}{4}$ f. $\frac{29}{39}$ i. 4 l. $-\frac{1}{12}$ o. -4

2\.

a. 6a d. $\frac{4b}{a}$ g. $6a+2$

b. $\frac{2x+1}{6x+2}$ e. 5 h. $x+4$

c. $\frac{b}{6c}$ f. $4y+1$ i. $\frac{3b-1}{4b}$

3\.

a. $\frac{7}{10}$ d. $\frac{22}{39}$ g. $\frac{17}{18}$ j. $-\frac{1}{3}$ m. 4

b. $\frac{41}{44}$ e. $-\frac{11}{9}$ h. $\frac{73}{24}$ k. $\frac{31}{35}$ n. $\frac{71}{91}$

c. $-\frac{5}{52}$ f. $\frac{5}{12}$ i. $\frac{35}{24}$ l. $\frac{37}{28}$ o. $\frac{19}{26}$

4\.

a. $\frac{8a}{3}$ d. $\frac{3a-ab}{bc}$ g. $\frac{5cy-2yz}{3cz}$

b. $\frac{2a+b}{6}$ e. $-\frac{2a+b}{2b}$ h. $\frac{4a+21}{7a}$

c. $\frac{13}{2a}$ f. $\frac{27}{10b}$ i. $\frac{18b-a}{3ab}$

5\.

a. $\frac{7}{20}$ d. $\frac{5}{14}$ g. $\frac{35}{16}$ j. $\frac{9}{16}$ m. $\frac{7}{12}$

b. $\frac{5}{28}$ e. $\frac{65}{6}$ h. 1 k. $7\frac{1}{2}$ n. $\frac{7}{18}$

c. $\frac{8}{77}$ f. $\frac{56}{99}$ i. $\frac{35}{24}$ l. 0 o. $\frac{24}{5}$

6\.

a. $\frac{bc}{3a}$ c. $\frac{12}{a}$ e. $\frac{4}{5}$ g. $\frac{8a}{7b}$ i. $\frac{27\mathrm{a}}{10}$

b. $\frac{24}{7c}$ d. 1 f. $\frac{\mathrm{ac}}{\mathrm{b}^2}$ h. $\frac{2\mathrm{a}}{63}$

7\.

a. $5+\frac{a}{3}$ c. $\frac{3}{\mathrm{a}}+\frac{4}{a}$ e. $\frac{2}{3}-\frac{\mathrm{b}}{3}$ g. $1+\frac{4}{a}$ i. $\frac{p}{q}+\frac{6}{q}$

b. $\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{c}{a}$ d. $\frac{3}{7}+\frac{c}{7}$ f. $\frac{3a}{c}-\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$ h. $\frac{q}{2}+\frac{p}{2}$

8\.

a. $\frac{10}{2(a+3)}+\frac{3(a+3)}{2(a+3)}=\frac{3a+19}{2a+6}$

b. $\frac{p(q+1)}{3(q+1)}+\frac{3p}{3(q+1)}=\frac{4p+pq}{3q+3}$

c. $\frac{1+a}{a(1+a)}-\frac{4a}{a(1+a)}=\frac{1-3a}{a+a^2}$

9.
a. $\frac{10}{18}+\frac{21}{18)}=\frac{31}{18}$ c. $\frac{20}{22}\times\frac{7}{3}=\frac{70}{33}$ e. $-\frac{5}{12}$

b. $-\frac{1}{30}$ d. $\frac{9}{20}$ f. $\frac{5}{7}:\frac{5}{6}=\frac{6}{7}$

1.3 Machten

1.
a. $\frac{6^7}{6^5}=6^2=36$ b. $\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{3^3}{2^3}=\frac{27}{8}$

c. $6\cdot 2^5=6\cdot 32=192$ of $6\cdot 4\cdot 8=192$ d. $\frac{7^5}{7^{2+3}}=\frac{7^5}{7^5}=7^{5-5}=7^0=1$

2.
a. $\frac{a^5b}{a^2}=a^{5-2}b=a^3b$ b. $\left(\frac{b}{4}\right)^2=\frac{b^2}{4^2}=\frac{b^2}{16}$

c. $4b^7b^5=4b^{7+5}=4b^{12}$ d. $\left(7a^3b^4\right)^2=7^2a^{3\times2}b^{4\times2}=49a^6b^8$

3.
a. $\frac{6^5}{6^7}=6^{5-7}=6^{-2}=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$ b. $\frac{b^{-2}}{4^{-2}}=\frac{4^2}{b^2}=\frac{16}{b^2}$

c. $4b^{-7+5}=4b^{-2}=\frac{4}{b^2}$ d. $2^{-2}a^6b^{-8}=\frac{a^6}{2^2b^8}=\frac{a^6}{4b^8}$

4. a. $\frac{a^5b}{a^7}=\frac{b}{a^2}$ b. $\frac{b^{-2}}{4^{-2}}=\frac{4^2}{b^2}=\frac{16}{b^2}$ c. $4b^{-7+5}=4b^{-2}=\frac{4}{b^2}$ d. $2^{-2}a^6b^{-8}=\frac{a^6}{2^2b^8}=\frac{a^6}{4b^8}$

5.
a. 125 c. $\frac{9}{25}$ e. 9 g. $\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}$ i. 128

b. $12\frac{1}{4}$ d. $1\frac{61}{64}$ f. $1\frac{4}{5}$ h. $\frac{1}{3}$ j. 225

6.
a. $7^{\frac{1}{3}}$ c. $9a^{\frac{1}{3}}$ e. $p^{\frac{1}{5}}$

b. $13^{\frac{1}{7}}$ d. $6^{\frac{3}{4}}$ f. $p^{\frac{2}{3}}$

7. $\sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$

8. a. 3^{10} b. a^7 c. 4^4 d. b^7

9. n=2

10. a. $\frac{\mathrm{b}^{13}}{\mathrm{a}^5}$ b. $\frac{b^{19}}{a^3}$ c. $\frac{1}{ab^2}$ d. $\frac{\mathrm{b}^3}{\mathrm{a}^{21}}$

11.

a. $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^4}$ c. $\frac{5^{-6}}{5^{-8}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = \frac{25}{\sqrt[3]{a^2}}$ e. $5^3 \cdot a^{-13} \cdot b^{\frac{3}{11}} = \frac{125\sqrt[11]{b^3}}{a^{13}}$

b. $\mathrm{a}^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^2}$ d. $a^{6\frac{1}{2}} \cdot 4^1 = 4\mathrm{a}^6\sqrt{\mathrm{a}}$ f. $\frac{a^9}{4^3}$

1.4 Procenten

1. a. 240 c. 2100 e. 300
   b. 150 d. 96 f. 125

2. a. 40% c. 25% e. 20%
   b. 35% d. 60% f. 24%

3. $(0{,}9975\text{-}1) \times 100\% = -0{,}25\%$ afname van 0,25%

4. a. $\frac{52}{40} = 1{,}3 \Rightarrow$ toename 30%
   b. $\frac{40}{52}$ =0,7692 $\Rightarrow -23{,}08\% \Rightarrow$ afname van 23,08%

5. $\frac{48}{0{,}75} = 64$ euro

6 $1077625 \times 1{,}036 = 1116419{,}5 \Rightarrow 1116419$ inwoners

7. $15000 \times 1{,}028^7 = 18.198{,}81$

8. $\frac{270{,}4}{1{,}04^2} = 250$

9. nieuwe prijs=0,8$\times$1,2$\times$oude prijs=0,96$\times$oude prijs

Dus de nieuwe prijs is 96% van de oude prijs, Arjen heeft geen gelijk.

10. $(0{,}945 - 1) \times 100\% = -5{,}5\%$

Dus met 5,5% gedaald.

11. $8500 \times 1{,}05^5 \times 1{,}03^5 \times 1{,}035^5 = 14.936{,}65$

12. omzet=prijs$\times$afzet $\Rightarrow 1{,}08 = 0{,}85 \times$ groeifactor afzet

Dus groeifactor afzet $= \frac{1{,}08}{0{,}85} = 1{,}2706$

Dus de afzet moet met 27,06% groeien.

2. Eerstegraads functies en vergelijkingen

2.1 Een eerstegraads vergelijking met een onbekende

1.

a. 5 | c. 4 | e. $-7\frac{7}{15}$ | g. 2

b. -6 | d. 5 | f. 9 | h. 6

2.

a. $-\frac{2}{11}$ | c. 2 | e. 1

b. $-4\frac{1}{4}$ | d. $-1\frac{1}{3}$ | f. $10\frac{1}{2}$

3.

a. $3x+27=2x-4 \Leftrightarrow x=-31$

b. $10x-10=x+5 \Leftrightarrow x=1\frac{2}{3}$

c. $-12+4x=x+1+4 \Leftrightarrow x=5\frac{2}{3}$

d. $2x+x=18 \Leftrightarrow x=6$

e. $10x+8=28-7x \Leftrightarrow x=1\frac{3}{17}$

f. $15x+10x=30+6x \Leftrightarrow x=1\frac{11}{19}$

g. $24+6x=x+1 \Leftrightarrow x=-4\frac{3}{5}$

h. $12x+8+5-x=13 \Leftrightarrow x=\frac{1}{11}$

4.

a. $4x+p-3=2x-2p+3 \Leftrightarrow x=\frac{6-3p}{2}$

b. $x+8+4p=16 \Leftrightarrow x=8-4p$

c. $3x-a+2x+8=11 \Leftrightarrow x=\frac{3+a}{5}$

d. $2x+2p=x+2p \Leftrightarrow x=0$

2.2 Twee eerstegraadsvergelijkingen met twee onbekenden

1. a. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+4=-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+3y=-4 \end{cases} \Big|_{-} \Leftrightarrow 0=5$

Er is dus geen oplossing

b. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+5=-3(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \Big|_{-} \Leftrightarrow 0=0$

Er zijn oneindig veel oplossingen

2.

$(\frac{1}{12},\frac{5}{12})$ niet , $\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{13}{12}$ maar $\frac{4}{12}-\frac{5}{12}\neq\frac{7}{6}$

$(\frac{1}{4},\frac{1}{6})$ niet , $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{13}{12}$ maar $1-\frac{1}{6}\neq\frac{7}{6}$

$(\frac{1}{4},-\frac{1}{6})$ wel , $\frac{3}{4}+\frac{2}{6}=\frac{13}{12}$ en $1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

3. a. $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-2y=-6 \end{cases} \begin{vmatrix} 3\times \\ 2\times \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6x+9y=12 \\ 6x-4y=-12 \end{vmatrix}_{-} \Rightarrow 13y=24 \Rightarrow y=\frac{24}{13} \Rightarrow 2x=4-\frac{72}{13} \Rightarrow x=-\frac{10}{13}$

b. $\begin{cases} -3x+4y=11 \\ x+y=3 \end{cases} \begin{vmatrix} 1\times \\ 3\times \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3x+4y=11 \\ 3x+3y=9 \end{vmatrix}_{+} \Rightarrow 7y=20 \Rightarrow y=\frac{20}{7}=2\frac{6}{7} \Rightarrow x=3-\frac{20}{7} \Rightarrow x=\frac{1}{7}$

c. $\begin{cases} 2x+7=3y-6 \\ 4y=-5x+2 \end{cases} \begin{vmatrix} -3y-7 \\ +5x \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x-3y=-13 \\ 5x+4y=2 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 4 \\ \times 3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 8x-12y=-52 \\ 15x+12y=6 \end{cases} \begin{vmatrix} +\text{tweede} \\ \ \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 23x=-46 \\ 15x+12y=6 \end{cases} \begin{vmatrix} \div(23) \\ \ \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 23x=-46 \\ 15x+12y=6 \end{cases} \begin{vmatrix} \div(23) \\ \ \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ 15x+12y=6 \end{cases} \begin{vmatrix} \ \\ \text{x invullen} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=-2 \\ -30+12y=6 \end{cases} \begin{vmatrix} \ \\ +30 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x-5y=\frac{3}{4} \\ 3x+4y=4 \end{cases} \begin{vmatrix} 4\times \\ 5\times \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 8x-20y=3 \\ 15x+20y=20 \end{vmatrix}_{+} \Rightarrow 23x=23 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 4y=4-3=1 \Rightarrow y=\frac{1}{4}$

e. $\begin{cases} 6x+9y=12 \\ 6x-4y=12 \end{cases} \Rightarrow 13y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

4. a. $R_A=37{,}5x$ $\quad x=$ aantal gewerkte uren.
$R_B=50+25x$

b. $x=3 \Rightarrow R_A=112{,}5$ en $R_B=125$
Ze kiezen voor reparateur A.

c. $37{,}5x=50+25x \Rightarrow x=\dfrac{50}{12{,}5}=4 \Rightarrow 4$ uur

5. a. $5p+2=-3p+34 \Leftrightarrow 8p=32 \Rightarrow p=4 \Rightarrow q=22 \Rightarrow$ prijs is 4 euro, aantal 22000 stuks.

b. $p=3,5 \Rightarrow q_a=19,5$ en $q_v=23,5 \Rightarrow$ een vraagoverschot van 4000 stuks.

evenwichtsituatie: $p=4, q=22 \Rightarrow p \times q = 22 \times 4 = 88 \Rightarrow 88000$ euro

c. bij b.: $p=3,5, q=19,5 \Rightarrow p \times q = 19,5 \times 3,5 = 68,25 \Rightarrow 68250$ euro

afname is $88000-68250=19750$ euro.

2.3 Eerstegraads functies

1. De grafiek bij de vergelijking *y*=5 is de horizontale lijn door het punt (0,5). Bij iedere *x* waarde hoort precies één y waarde. De grafiek bij de vergelijking *x*=5 is de verticale lijn door het punt (5,0). Bij de *x* waarde 5 horen oneindig veel *y* waarden.

2. a. $4y+4=2x-2+5 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

b. $4x-6y=3y-3+x \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

3. a. $f(4)=5,\ f(-3)=-16,\ f(a)=3a-7,\ f(a+1)=3a-4$

b. $f(4)=-3,\ f(-3)=11,\ f(a)=-2a+5,\ f(a+1)=-2a+3$

4. a. $7x+4y=6 \Rightarrow 4y=-7x+6 \Rightarrow y=-\frac{7}{4}x+\frac{3}{2} \Rightarrow r.c.=-\frac{7}{4}$

b. $-x+3y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow r.c.=\frac{1}{3}$

5. a. $r.c.=2 \Rightarrow y=2x+b$ $(3,4)$ invullen geeft $4=6+b \Rightarrow b=-2 \Rightarrow y=2x-2$

b. $r.c.=-5 \Rightarrow y=-5x+b$ $(-1,4)$ invullen geeft $4=5+b \Rightarrow b=-1 \Rightarrow y=-5x-1$

6. a. $r.c.=\frac{40+5}{20+10}=\frac{45}{30}=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+b$ invullen van (20,40) geeft $b=10 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+10$

b. $r.c.=\frac{14-10}{3-2}=4 \Rightarrow y=4x+b$ invullen van (2,10) geeft $b=2 \Rightarrow y=4x+2$

7.

$$(a,1) \Rightarrow 1 = 2a - 5 \Rightarrow a = 3$$
$$(-2,b) \Rightarrow b = 4 - 5 \Rightarrow b = -1$$
$$(c,c) \Rightarrow c = 2c - 5 \Rightarrow c = 5$$
$$(d,-d) \Rightarrow -d = 2d - 5 \Rightarrow d = \frac{5}{3}$$

8.

$a.$ $x - 2y = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow r.c. = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + b$

invullen van (2,7) geeft $b = 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 6$

$b.$ $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \left| \begin{matrix} 3\times \\ 1\times \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow$ aftrekken geeft $\Rightarrow -7y = 6 \Rightarrow y = -\frac{6}{7}$

y invullen in $x - 2y = 4$ geeft $x = 2\frac{2}{7} \Rightarrow (2\frac{2}{7}, -\frac{6}{7})$

9. a. $\frac{0,21}{\Delta x} = 0,7 \Rightarrow \Delta x = \frac{0,21}{0,7} = 0,3$

b. $\frac{\Delta y}{0,4} = 0,7 \Rightarrow \Delta y = 0,28$

10. a. Bij q_v daalt de gevraagde hoeveelheid als de prijs toeneemt.

b. $-2,5p + 115 = p + 10 \Rightarrow p = 30 \Rightarrow q = 40 \Rightarrow$ prijs 30 euro, hoeveelheid 40.000 stuks.

c. $p = 35 \Rightarrow q_v = 27,5$ en $q_a = 45 \Rightarrow$ aanbodoverschot=45 – 27,5=17,5 $\Rightarrow$ 17.500 stuks.

11.

a. $x =$ aantal gereden km

$$\begin{cases} T_1 = 249 & 0 \le x \le 100 \\ T_1 = 83 \times 3 + 0,43(x - 100) = 206 + 0,43x & \text{voor } x \ge 100 \end{cases}$$

$$T_2 = 4 \times 97 = 388$$

$b.$ $T_1 = T_2 \Rightarrow 206 + 0,43x = 388 \Rightarrow x = 423,26 \Rightarrow$ vanaf 423,3 km

3. Tweedegraads functies en vergelijkingen

3.1 Tweedegraads vergelijkingen

1.

$$5x^2+3x=0 \Rightarrow a=5, b=3, c=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times5\times0}}{2\times5}=\frac{-3\pm\sqrt{9-0}}{10}=\frac{-3\pm3}{10}\Rightarrow x=0 \text{ of } x=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$$

$$2x^2+3x=-x^2+x \Leftrightarrow 3x^2+2x=0 \Rightarrow a=3, b=2, c=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times3\times0}}{2\times3}=\frac{-2\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{-2\pm2}{6}\Rightarrow x=0 \text{ of } x=-\frac{2}{3}$$

$$3x^2-27=0 \Rightarrow a=3, b=0, c=-27 \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\times3\times(-27)}}{2\times3}=\frac{\pm\sqrt{324}}{6}=\pm\frac{18}{6}=\pm3\Rightarrow x=3 \text{ of } x=-3$$

$$6x^2-5=2x^2+59 \Leftrightarrow 4x^2-64=0 \Rightarrow a=4, b=0, c=-64$$

$$x_{1,2}=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4\times4\times(-64)}}{2\times4}=\frac{\pm\sqrt{1024}}{8}=\pm\frac{32}{8}=\pm4\Rightarrow x=4 \text{ of } x=-4$$

$$x^2+8x+15=0 \Rightarrow \text{a=1,b=8,c=15}$$

$$\mathrm{x}_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times1\times15}}{2\times1}=\frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{-8\pm2}{2}=-4\pm1\Rightarrow x=-3 \text{ of } x=-5$$

2.

a. $x=3$ of $x=-5$

b. $x=2$ of $x=-4$

c. $x=-4$ of $x=-6$

d. $x=-3$ of $x=-9$

e. $x=3$

f. $x=1$ of $x=9$

a. $b^2-4ac=0-96<0 \Rightarrow$ geen oplossing

b. $x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{529}}{6}=\dfrac{7\pm 23}{6}\Rightarrow x=5$ of $x=-\dfrac{16}{6}=-\dfrac{8}{3}$

c. $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-4}=\dfrac{-3\pm 1}{-4}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ of $x=1$

3. d. $x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49+32}}{8}=\dfrac{7\pm 9}{8}\Rightarrow x=2$ of $x=-\dfrac{1}{4}$

e. $x_{1,2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-16}}{2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{20}}{2}\Rightarrow x=-3+\sqrt{5}$ of $x=-3-\sqrt{5}$

f. $b^2-4ac=0-4<0\Rightarrow$ geen oplossing

g. $x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+16}}{-4}=\dfrac{-4\pm\sqrt{32}}{-4}=\dfrac{-4\pm 4\sqrt{2}}{-4}\Rightarrow x=1+\sqrt{2}$ of $x=1-\sqrt{2}$

h. $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{-2\pm 1}{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=-6$ of $x=-2$

3.2 Tweedegraads functies

1. Voor $a=0$ wordt $f(x)=bx+c$. De functie is geen tweedegraads functie meer.

$a(x)=x^2-3$

snijpunten x-as: $x^2=3\Rightarrow x=-\sqrt{3}$ of $x=\sqrt{3}$

2. $x_{top}=-\dfrac{0}{2}=0$ of $x_{top}=-\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=0$

$a>0$ minimum $a(0)=-3$

snijpunt y-as:x=0 $\Rightarrow a(0)=-3\Rightarrow(0,-3)$

$b(x)=-(x-5)^2$

snijpunten x-as: $(x-5)^2=0\Rightarrow x=5\Rightarrow$ de grafiek raakt de x-as in (5,0)

$a<0$ maximum $b(5)=0$

snijpunt y-as: $x=0\Rightarrow b(0)=-(5)^2\Rightarrow(0,-25)$

$c(x)=(x-1)^2-3$

snijpunten x-as: $(x-1)^2=3\Rightarrow x-1=-\sqrt{3}$ of $x-1=\sqrt{3}$

$\Rightarrow x=1+\sqrt{3}$ of $x=1-\sqrt{3}\Rightarrow$

De snijpunten met de x-as zijn $(1-\sqrt{3},0)$ en $(1+\sqrt{3},0)$

$x_{top}=1$

$a>0$ minimum $a(1)=-3$

snijpunt y-as: $x=0\Rightarrow c(0)=-2\Rightarrow(0,-2)$

$d(x) = 3x^2 - 2$

snijpunten x-as: $3x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ of x=$\sqrt{\frac{2}{3}}$

de snijpunten met de x-as zijn $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ en $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$

$x_{top} = -\frac{0}{6} = 0$

$a > 0$ minimum $d(0) = -2$

snijpunt y-as: x=0 $\Rightarrow d(0) = -2 \Rightarrow (0, -2)$

$e(x) = x^2 + 3x + 6$

snijpunten x-as: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{2} \Rightarrow$ D<0 geen snijpunten met de x-as.

$x_{top} = -\frac{3}{2}$

$a > 0$ minimum $e(-\frac{3}{2}) = (-\frac{3}{2})^2 + 3 \times (-\frac{3}{2}) + 6 = 3\frac{3}{4} \Rightarrow (-1\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4})$

snijpunt y-as: x=0 $\Rightarrow e(0)=6 \Rightarrow (0,6)$

$f(x) = -x^2 + 6x - 6$

snijpunten x-as: $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times (-1) \times (-6)}}{2 \times (-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{-2} = 3 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = 3 - \sqrt{3}$ *of* $x = 3 + \sqrt{3}$

de snijpunten met de x-as zijn $(3 - \sqrt{3}, 0)$ en $(3 + \sqrt{3}, 0)$

$x_{top} = -\frac{6}{-2} = 3$

$a < 0$ maximum $f(3) = 3$

snijpunt y-as: x=0 $\Rightarrow f(0) = -6 \Rightarrow (0, -6)$

$g(x) = -2x^2 + 4$

snijpunten x-as: $x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ of x=$\sqrt{2}$

snijpunten met de x-as zijn $\sqrt{2}, 0)$ en $(-\sqrt{2}, 0)$

$x_{top} = -\frac{0}{-4} = 0$

$a < 0$ maximum $g(0) = 4$

snijpunt y-as: x=0 $\Rightarrow g(0)=4 \Rightarrow (0,4)$

$h(x) = 2x^2 + 3x + 1$

snijpunten x-as: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} = \dfrac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow x = -1$ of $\text{x} = -\dfrac{1}{2}$

snijpunten met de x-as zijn $(-1, 0)$ en $(-\dfrac{1}{2}, 0)$

$x_{top} = -\dfrac{3}{4}$

$a > 0$ minimum $\text{m}(-\dfrac{3}{4}) = -\dfrac{1}{8}$

snijpunt y-as: $x=0 \Rightarrow h(0)=1 \Rightarrow (0,1)$

$4x^2 - 5x + 37 = 3x^2 + 13x - 40 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 77 = 0 \Leftrightarrow$

3. $(x - 11)(x - 7) = 0 \Rightarrow x = 11$ of $x = 7 \Rightarrow$

De snijpunten met de x-as zijn $(7, 0)$ en $(11, 0)$

a. $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ of $x = 12$

4. $f(x) = 8 \Rightarrow x = 4$ of $x = 10$

b. $f(0) == 12 \qquad f(3) = 4,5 \qquad f(a+1) = -\frac{1}{2}a^2 + 6a - 5\frac{1}{2}$

a. $x = \dfrac{-3+5}{2} = 1$

5.

b. $x = \dfrac{3-5}{2} = -1$

a. $-12\text{q}^2 + 96q = -12q(q - 8) = 0 \Rightarrow q = 0$ of $q = 8$

$a < 0 \Rightarrow$ de grafiek is een bergparabool $\Rightarrow$ TO is positief voor $0 \le q \le 8$

b. TO(3)=180 en TO(2)=144 $\Rightarrow \dfrac{180}{144} = 1,25 \Rightarrow (1,25 - 1) \times 100\% = 25\%$

6.

c. $TW = -18q^2 + 96q + 15 \Rightarrow$

$q_{\max} = -\dfrac{96}{-36} = 2\frac{2}{3}$ dus de winst is maximaal voor $q = 2\frac{2}{3}$.

De maximale winst $TW = -18 \times (2\frac{2}{3})^2 + 96 \times (2\frac{2}{3}) + 15 = 113$

a. TO=$pq = p(65-2,5p) = -2,5p^2 + 65p$

b. $TW = 65p - 2,5p^2 - (10(65-2,5p)+40) = 65p - 2,5p - 650 + 25p - 40 =$

7. $= -2,5p^2 + 90p - 690$

c. $p_{\max} = -\dfrac{90}{-5} = 18 \Rightarrow TW_{\max} = -2,5 \times 18^2 + 90 \times 18 - 690 = 120 \Rightarrow$

De maximale winst is 120.000 euro.

a. De bal raakt de grond als $y = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{50}x(x-30) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = 30 \Rightarrow$

Wikke trapt de bal 30 meter ver.

8. $x_{\max} = \dfrac{0+30}{2} = 15 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{50}(15)^2 + 0,6 \times 15 = 4,5 \Rightarrow$

De bal bereikt een maximale hoogte van 4,5 meter

b. $x_{\max} = -\dfrac{a}{-\frac{1}{2}} = 2a \Rightarrow -\dfrac{1}{4}(2a)^2 + 2a^2 - 8a + 21 = 5 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 16 = 0 \Leftrightarrow (a-4)^2 = 0 \Rightarrow a = 4$

a. $7.500 = 2,5 \times o \Rightarrow o = 3000$

$x =$ breedte werk $\Rightarrow$ lengte werk=$120 - x$

lengte×breedte=oppervlakte, dus:

$x(120-x) = 3000$, dit geeft de vergelijking: $-x^2 + 120x - 3000 = 0$

x oplossen geeft:

9. $x_{1,2} = \dfrac{-110 \pm \sqrt{110^2 - 12000}}{-2} = \dfrac{-110 \pm \sqrt{12100 - 12000}}{-2} = 55 \pm 5 \Rightarrow x = 50$ of $x = 60$

Dus de breedte is 50 cm en de lengte 60 cm.

b. $-x^2 + 120x - 3000 = 0$ is maximaal voor:

$x_{\max} = -\dfrac{110}{-2} = 55$

Dus het werk levert de maximale waarde als zowel de lengte als breedte 55 cm is.

De maximale waarde $= 55^2 \times 2,5 = 7562,50$ euro.

Entreetoets

Maak de toets zonder gebruik te maken van een rekenmachine.
Een uitzondering vormen de opgaven 11, 12 en 13. Bij deze opgaven mag een gewone rekenmachine worden gebruikt.
Opgaven 19 en 20 horen bij hoofdstuk 3. Hieronder staat informatie die je nodig hebt voor deze opgaven.

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$

symmetrieas: $x = -\dfrac{b}{2a}$

$ax^2 + bx + c = 0$ voor $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Discriminant $D = b^2 - 4ac$ bepaalt het aantal snijpunten.

$D > 0 \Rightarrow 2$ snijpunten

$D = 0 \Rightarrow 1$ raakpunt

$D < 0 \Rightarrow$ geen snijpunten

$f(x)$ heeft een maximum als $a < 0$ en een minimum als $a > 0$.

$x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a}$

1. Werk de haakjes weg en vereenvoudig zo ver mogelijk:
   $6x - (2x - (x + 3y))$

2. Neem $a = 6,\ b = \dfrac{1}{3}$ en bereken:
   $(a-1)(-b)^2$

3. Vereenvoudig zo ver mogelijk
   $\dfrac{14x + 7}{28x - 35}$

4. Maak gelijknamig en breng onder één noemer:

$$\frac{a}{b}+\frac{5}{2a}$$

5. Schrijf als één breuk:

a. $\frac{2}{a}\times\frac{b}{5}$ b. $\frac{3}{8}:\frac{1}{4}\times\frac{b}{c}$

6. Schrijf als één breuk:

$$\frac{2}{a+3}+\frac{5}{2}$$

7. Bereken:

a. $\frac{4}{7}+\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}$ b. $\frac{2}{9}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$

8. Bereken:

a. $\frac{4^{-2}\cdot 4^{-3}}{4^{-7}}$ b. $\frac{3^2}{2^{-3}}$

9. Schrijf als macht en vereenvoudig indien mogelijk:

a. $\sqrt[3]{2^6 b}$ b. $\sqrt[7]{p^2}$

10. Vereenvoudig en schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten:

a. $\left(\frac{4^3}{4^2}\right)^{-2}\cdot a^{-\frac{2}{5}}$ b. $3^2\cdot a^2\cdot\frac{3^{-4}}{a^{-7}}$

11. De prijs van benzine is aan schommeling onderhevig. In een bepaald land steeg de prijs met 5% en daalde toen weer met 5%. Met hoeveel procent is de prijs in totaal toe- of afgenomen?

12. De Spaarbank geeft per jaar 4% rente over het bedrag dat gedurende dat hele jaar op een spaarrekening staat. Lieke heeft op haar spaarrekening een heel jaar lang € 2.250,00 staan.
Hoeveel rente krijgt zij na een jaar?

13. Een zeker land had op 1 januari 2010 een inwonertal van 2.000.000. Elk jaar stijgt het inwonertal met 3%.
Bereken het inwonertal na precies 10 jaar.

14. Bereken x:

a. $4(2x-7)=3(5+x)$ b. $-(x+1)+2(x-3)=4x+6$

15. Los x en y op: $\begin{cases} 2x-7=3y+6 \\ 4y=-5x-2 \end{cases}$

16. Onderstaande vergelijking is de vergelijking van een rechte lijn. Bereken daarvan de richtingscoëfficiënt.
$5x+4y=7$

17. Geef de vergelijking van de lijn met een richtingscoëfficiënt van -4, die door het punt (2, 5) gaat.

18. Gegeven is $y=0,5x+4$.
Bereken Δx als $\Delta y=0,3$.

19. Bereken de oplossingen van: $\frac{1}{4}x^2+6x+5=4x+2$

20. Bepaal voor de grafiek van de functie $f(x)=2x^2+3x+1$
- de coördinaten van de top en zeg of er een maximum of minimum is;
- indien aanwezig, de snijpunten met de x-as;
- het snijpunt met de y-as.

Antwoorden entreetoets

1. $5x+3y$

2. $\frac{5}{9}$

3. $\frac{2x+1}{4x-5}$

4. $\frac{2a^2+5b}{2ab}$

5. a. $\frac{2b}{5a}$ b. $\frac{3b}{2c}$

6. $\frac{5a+19}{2a+6}$

7. a. $\frac{29}{14}=2\frac{1}{14}$ b. $\frac{8}{21}$

8. a. 16 b. 72

9. a. $4b^{\frac{1}{3}}$ b. $p^{\frac{2}{7}}$

10 a. $\frac{1}{16\sqrt[5]{a^2}}$ b. $\frac{1}{9}a^9$

11. $1,05\times 0,95=0,9975$
$(0,9975-1)\cdot 100\%=-0,25\%$
De prijs is dus afgenomen met 0,25%.

12. $0,04\times 2250=90$
De rente bedraagt dus 90 euro.

13. $2.000.000\times 1,03^{10}=2.687.832$

14. a. $5x = 43 \Rightarrow x = \frac{43}{5} = 8\tfrac{3}{5}$ b. $3x = -13 \Rightarrow x = -\frac{13}{3} = -4\tfrac{1}{3}$

15. $\begin{cases} 2x - 3y = 13 & |4\times \\ 5x + 4y = -2 & |3\times \end{cases} \Rightarrow \begin{rcases} 8x - 12y = 52 \\ 15x + 12y = -6 \end{rcases}$ optellen geeft $23x = 46 \Rightarrow x = 2$

Invullen van $x = 2$ in $2x - 3y = 13$ geeft $y = -3$

16. $x = -\tfrac{4}{5}y + \tfrac{7}{5} \Rightarrow r.c. = -\tfrac{4}{5}$

17. $y = -4x + b$

$(2,5)$ invullen geeft $5 = -8 + b \Rightarrow b = 13$.

De vergelijking is dus: $y = -4x + 13$

18. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}5 \Rightarrow \Delta x = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$

19. $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{\frac{1}{2}} = \frac{-2 \pm 1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = -6$ of $x = -2$

20.

$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

snijpunten x-as: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow x = -1$ of $x = -\frac{1}{2}$

De snijpunten met de x-as zijn $(-1, 0)$ en $(-\frac{1}{2}, 0)$.

$x_{top} = -\frac{3}{4}$

$a > 0$; het minimum is $f\left(-\tfrac{3}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

snijpunt y-as: $(0,1)$

Eindtoets

Maak de toets zonder gebruik te maken van een rekenmachine.
Een uitzondering vormen de opgaven 9 t/m 13. Bij deze opgaven mag de rekenmachine worden gebruikt.

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$

symmetrieas: $x = -\dfrac{b}{2a}$

$ax^2 + bx + c = 0$ voor $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Discriminant $D = b^2 - 4ac$ bepaalt het aantal snijpunten.

$D > 0 \Rightarrow$ 2 snijpunten

$D = 0 \Rightarrow$ 1 raakpunt

$D < 0 \Rightarrow$ geen snijpunten

$f(x)$ heeft een maximum als $a < 0$ en een minimum als $a > 0$.

$x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a}$

1. Werk de haakjes weg en vereenvoudig zo ver mogelijk:
   a. $20x - (5x - (x + 4y) + y) =$
   b. $5(a - 7b) - (12a - 5b(6a - 2b)) =$
   c. $2(y - x)^2 - 3x + 7y^2 - 5(2x - 6y) + 8 =$

2. Neem $a = -\dfrac{1}{2},\ b = 4$ en bereken:
   a. $(a^2 b)^2 =$
   b. $-4(2a - 7(6 - b))(1 - a) =$

3. Maak gelijknamig en breng onder één noemer:

   a. $\dfrac{2a}{2} + \dfrac{5b}{3a}$ b. $\dfrac{3a}{bc} - \dfrac{5}{2c}$ c. $\dfrac{5y}{4z} - \dfrac{y}{3c}$

4. Schrijf als één breuk:

a. $\frac{b}{a} \times \frac{c}{4}$ b. $\frac{b+2}{a} : \frac{b}{a+1}$ c. $\frac{3}{8} : \frac{1}{5} \times \frac{2a}{3b}$

5. Breng onder één noemer:

a. $\frac{5}{a+1} + \frac{3}{a-1}$ b. $\frac{p}{4} + \frac{2p}{q+1}$ c. $\frac{1}{ab} - \frac{3}{1+a}$

6. Bereken:

a. $\frac{5}{9} + \frac{7}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)$ b. $\frac{5}{-11} : \frac{-2}{5} \times \frac{7}{3}$ c. $\frac{a}{b} + \frac{-2a}{3b} - \frac{a}{2b}$

7. Gegeven is dat $5^n = \frac{5^2 : 5^4 \cdot (5^2 \cdot 5^3)^4}{5^9 \cdot 5^7}$.

Bereken *n.*

8. Vereenvoudig en schrijf zonder negatieve exponenten.

a. $\frac{(a^6 \cdot b^{-2})^{-5} \cdot a^7}{a^0 \cdot b^8}$

b. $\left(\frac{6^3}{6^4} \right)^{-2} \cdot a^{-\frac{3}{5}}$

9. De prijs van een artikel is veranderd met de factor 1,045. Met hoeveel procent is de prijs gestegen of gedaald?

10. Men wil de prijs van een artikel met 5% verlagen. Met welk percentage moet de afzet stijgen om de omzet toch met 3% te laten toenemen? (omzet= prijs $\times$ afzet.)

11. Een kapitaal van € 6.000,- heeft 19 jaar op een spaarrekening gestaan tegen samengestelde interest. De eerste 4 jaar vergoedde de bank 7% per jaar, daarna 6 jaar lang 4,3% per jaar en vervolgens de laatste 9 jaar 3% per jaar.
Tot welk bedrag is het kapitaal van € 6.000,- in de 19 jaar aangegroeid?

12. Veerle heeft 6 jaar geleden een kapitaal op een spaarrekening gezet tegen een samengestelde interest van 4%. Het kapitaal is nu, precies na 6 jaar aangegroeid tot € 1.581,65,-
Bereken welk kapitaal ze 6 jaar geleden op de spaarrekening heeft gezet.

13. In een zeker land met 15 miljoen inwoners groeit het inwonertal ieder jaar met 4,2%.
   a. Bereken het inwoneraantal na 25 jaar.
   b. Met hoeveel procent is de bevolking na 25 jaar toegenomen?

14. Los de volgende vergelijkingen op:

a. $2(x-4)-(3-x)=4(2x+3)-7(2-x)$

b. $5(x+3)-(x-4)=-(3x+2)+6(x+1)$

c. $\frac{1}{2}(x+4)-6=\frac{1}{5}(x-2)$

d. $\frac{1}{6}(6x+4)=\frac{1}{3}(4-x)$

e. $x-3=\frac{1}{4}x+6$

15. Los x op:

a. $6x-12p-1=3(x-2p)+2$

b. $\frac{1}{3}(x+2p)=\frac{1}{4}(x+3p)$

16. Los x en y op:

$$\begin{cases} 3x-y=40 \\ -8x-2y=10 \end{cases}$$

17. Op een markt met volledige mededinging gelden voor een bepaald product de volgende vraag- en aanbodfuncties:

$q_a = 2p+20$ en $q_v = -5p+300$

waarbij q_a en q_v aantallen producten in honderdtallen voorstellen; *p* is de prijs in euro's.

De evenwichtsprijs is de prijs waarbij de vraag gelijk is aan het aanbod. $\left(q_a = q_v\right)$

a. Bereken de evenwichtsprijs en hoeveelheid.

De overheid stelt de prijs van het product vast op € 35,-.

b. Ga na of er bij deze prijs sprake is van een aanbod- dan wel een vraagoverschot, en bereken de grootte van dit overschot.

c. Met hoeveel is de totale opbrengst (prijs $\times$ hoeveelheid) van dit product afgenomen ten opzichte van de evenwichtssituatie?

18. Schrijf onderstaande vergelijking in de standaardvorm $y = ax+b$ en geef de richtingscoëfficiënt en het snijpunt met de Y-as.

$3(y+1)=2(x-1)$

19. Gegeven is de functie $f(x)=3x-4$. Bepaal $f(2+a)$

20. Geef de vergelijking van de lijn door $(2,5)$ en $\text{r.c.}=3$

21. Stel een vergelijking op van de lijn door de punten $(3,-1)$ en $(10,-15)$,

22. Op de lijn $y=4x-7$ liggen de punten $(\text{a},1)$ en $(-2,\text{b})$.
Bereken a en b.

23. Gegeven zijn de lijnen $x+y=6$ en $4x=-3y+1.$
   a. Geef een vergelijking van de lijn door het punt (2,3) die evenwijdig loopt aan de lijn $x+y=6$.
   b. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de twee lijnen.

24. Gegeven is $y=0,3x+2$.
   a. Bereken Δx als $\Delta y=0,27$.
   b. Bereken Δy als $\Delta x=4$.

25. Elin wil een auto huren. Ze heeft de keuze uit twee tarieven:
Tarief 1 € 80,- per dag, plus € 0,50 per km.
Tarief 2 € 70,- per dag, plus € 0,55 per km.

   a. Geef de vergelijkingen die bij de tarieven horen.
   b. Bereken bij welk aantal kilometers tarief 1 goedkoper wordt.

26. Bereken de oplossingen van:
   a. $x^2-3x-5(3-x)=0$
   b. $x^2+8=0$
   c. $2x^2-7x=4$
   d. $3x^2+4x+1=0$
   e. $x^2-2x+1=0$
   f. $x^2-10x+21=0$

27. Bepaal voor de grafiek van de volgende functies:
   - de coördinaten van de top en zeg of er een maximum of minimum is.
   - indien aanwezig de snijpunten met de x-as.
   - het snijpunt met de y-as.

   a. $f(x)=-x^2+8x-33$

   b. $g(x)=x^2+4x-5$

28. Bereken de snijpunten van $y=3x^2-6x+40$ en $y=2x^2-13x+28$

29. Bereken de symmetrieas van de volgende functies.
   a. $f(x)=(x+2)(x-8)$
   b. $g(x)=x^2-4x+1$

30. Een slijter koopt flessen wijn in, tegen een prijs van € 4,- per fles.
De afzet als functie van de prijs is:

$$q = 65 - 2,5p$$

met q de afzet per jaar in duizenden flessen en p de verkoopprijs in euro's.

Om de flessen te kunnen opslaan huurt de slijter een opslagruimte voor € 20.000,- per jaar.

a. Schrijf de totale omzet (TO)per jaar (in duizenden euro's) als functie van p .

b. Laat zien dat de uitdrukking voor de totale winst per jaar (in duizenden euro's) als functie van p te schrijven is als:

$$\text{TW} = -2,5p^2 + 75p - 280$$

(TW=TO-TK, TK=totale kosten in duizenden euro's)

c. Bereken bij welke verkoopprijs per fles de jaarwinst maximaal zal zijn, en geef de bijbehorende maximale winst.

31. De functie $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + px + 16$ heeft een minimum voor $x = 20$.
Bereken p .

32. Een rechthoekig stuk land met een oppervlakte van 200 m^2 wordt omzoomd met een hekwerk. Het omzomen kost € 300,-.
Bereken de lengte en breedte van het stuk land als het omzomen € 5,- per meter kost.

Antwoorden eindtoets

1. a. $20x-(5x-x-4y+y)=20x-(4x-3y)=16x+3y$

   b. $5a-35b-(12a-30ab+10b^2)=5a-35b-12a+30ab-10b^2=-7a-3b+30ab-10b^2$

   c. y $2(y^2-2xy+x^2)-3x+7y^2-10x+30y+8=2x^2-13x+9y^2+30y-4xy+8$

2. a. $((-\tfrac{1}{2})^2\cdot 4)^2=(\tfrac{1}{4}\cdot 4)^2=1$

   b. $-4(2\cdot(-\tfrac{1}{2})-7(6-4)\cdot\tfrac{3}{2})=-4(-1-7\cdot 2\cdot\tfrac{3}{2})=-4\cdot(-22)=88$

3. a. $\dfrac{6a^2}{6a}+\dfrac{10b}{6a}=\dfrac{6a^2+10b}{6a}$

   b. $\dfrac{6a}{2bc}-\dfrac{5b}{2bc}=\dfrac{6a-5b}{2bc}$

   c. $\dfrac{15cy}{12cz}-\dfrac{4yz}{12cz}=\dfrac{15cy-4yz}{12cz}$

4. a. $\dfrac{bc}{4a}$

   b. $\dfrac{b+2}{a}\cdot\dfrac{a+1}{b}=\dfrac{(a+1)(b+2)}{ab}$

   c. $\dfrac{15}{8}\cdot\dfrac{2a}{3b}=\dfrac{5a}{4b}$

5. a. $\dfrac{5(a-1)+3(a+1)}{a^2-1}=\dfrac{8a-2}{a^2-1}$

   b. $\dfrac{p(q+1)+8p}{4(q+1)}=\dfrac{9p+pq}{4(q+1)}$

   c. $\dfrac{1+a-3ab}{ab(1+a)}$

6. a. $\frac{5}{9}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{9}+\frac{7}{4}=\frac{20+63}{36}=\frac{83}{36}$

b. $\frac{25}{22}\cdot\frac{7}{3}=\frac{175}{66}$

c. $\frac{6a-4a-3a}{6b}=\frac{-a}{6b}$

7. $5^n=\frac{5^{-2}\cdot 5^{20}}{5^{16}}=5^2\Rightarrow n=2$

8. a. $\frac{a^{-30}\cdot b^{10}\cdot a^7}{b^8}=\frac{b^2}{a^{23}}$

b. $\frac{1}{6^2}\cdot a^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{36a^{\frac{3}{5}}}=\frac{1}{36\sqrt[5]{a^3}}$

9. $(1,045-1)\cdot 100=4,5$, de prijs is met 4,5 % gestegen.

10. $1,03=0,95\cdot x\Rightarrow x=\frac{1,03}{0,95}=1,0842\Rightarrow(1,0842-1)\cdot 100=8,42$.

De afzet moet met 8,42 % toenemen.

11. $6.000\cdot 1,07^4\cdot 1,043^6\cdot 1,03^9=13.210,74\Rightarrow$ € 13.210,74

12. $\frac{1581,65}{1,04^6}=1250\Rightarrow$ € 1250,-

13. a. $15.000.000\cdot 1,042^{25}=41.955.049\Rightarrow$ 41.955.049 inwoners

b. $1,042^{25}=2,7970\Rightarrow(2,797-1)\cdot 100=179,7\Rightarrow$

De bevolking is met 179,7 % toegenomen.

14. a. $2x-8-3+x=8x+12-14+7x\Rightarrow 3x-11=15x-2\Rightarrow 12x=-9\Rightarrow x=-\frac{3}{4}$

b. $5x+15-x+4=-3x-2+6x+6\Rightarrow 4x+19=3x+4\Rightarrow x=15$

c. $5(x+4)-60=2(x-2)\Rightarrow 5x-40=2x-4\Rightarrow 3x=36\Rightarrow x=12$

d. $6x+4=2(4-x)\Rightarrow 6x+4=8-2x\Rightarrow 8x=4\Rightarrow x=2$

e. $\frac{3}{4}x=9\Rightarrow x=\frac{36}{3}=12$

15. a. $6x-12p-1=3x-6p+2 \Rightarrow 3x=6p+3 \Rightarrow x=2p+1$

b. $4(x+2p)=3(x+3p) \Rightarrow 4x+8p=3x+9p \Rightarrow x=p$

16. $\begin{array}{r|l} 3x-y=40 & 2\times \\ -8x-2y=10 & 1\times \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|} 6x-2y=80 \\ -8x-2y=10 \end{array}_{-} \Rightarrow 14x=70 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y=-25$

17. a. $2p+20=-5p+300 \Rightarrow 7p=280 \Rightarrow p=40 \Rightarrow q=100$

De evenwichtsprijs is € 40,- en de evenwichtshoeveelheid is 10 000 stuks.

b. $p=35 \Rightarrow q_a=90$ en $q_v=125.$ Er is een vraagoverschot van 3 500 stuks.

c. $p=40 \Rightarrow p \cdot q=40 \cdot 100=4000$

$p=35 \Rightarrow p \cdot q=35 \cdot 90=3150$

De afname is $4000-3150=850$. Er is een afname van € 85.000,-

18. $3y+3=2x-2 \Rightarrow 3y=2x-5 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \Rightarrow r.c=\frac{2}{3}$ en snijpunt met de y-as $(0,-\frac{5}{3})$

19. $f(2+a)=3(2+a)-4=3a+2$

20. r.c.=3 geeft $y=3x+b$. Invullen van (2,5) in $y=3x+b$ geeft $5=6+b \Rightarrow b=-1$

De vergelijking wordt $y=3x-1$.

21. $r.c.=\dfrac{-15-(-1)}{10-3}=\dfrac{-14}{7}=-2.$

Dit geeft $y=-2x+b.$ Invullen van $(3,-1)$ in $y=-2+b$ geeft

$-1=-6+b \Rightarrow b=5.$ De vergelijking wordt $y=-2x+5.$

22. $(a,1)$ invullen geeft $1=4a-7 \Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2.$

$(-2,b)$ invullen geeft $b=-8-7=-15$

23. a. $x+y=6 \Rightarrow y=-x+6 \Rightarrow r.c.=-1$

De vergelijking van de lijn wordt $y=-x+b.$

Invullen van $(2,3)$ geeft $3=-2+b \Rightarrow b=5.$ De vergelijking wordt $y=-x+5.$

b. $x=6-y$ invullen in $4x+3y=1$ geeft $4(6-y)+3y=1 \Rightarrow y=23 \Rightarrow x=6-23=-17$

24. $r.c. = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0,3$

a. $\dfrac{0,27}{\Delta x} = 0,3 \Rightarrow \Delta x = \dfrac{0,27}{0,3} = 0,9$

b. $\dfrac{\Delta y}{4} = 0,3 \Rightarrow \Delta y = 4 \cdot 0,3 = 1,2$

25. a. $T_1 = 80 + 0,5x$ en $T_2 = 70 + 0,55x$ met $x =$ aantal gereden kilometers.

b. $80 + 0,5x = 70 + 0,55x \Rightarrow 0,05x = 10 \Rightarrow x = 200.$ Vanaf 200 km.

26. a. $x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 5$ of $x = -3$

b. $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow$ geen oplossing.

c. $2x^2 - 7x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \dfrac{7 \pm 9}{4} \Rightarrow x = \dfrac{16}{4} = 4$ of $x = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

d. $3x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \dfrac{-4 \pm 2}{6} \Rightarrow x = -1$ of $x = -\dfrac{1}{3}$

e. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

f. $x^2 - 10x + 21 = (x-7)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 7$ of $x = 3$

27. a. $f(x) = -x^2 + 8x - 33$

$D = 64 - 4 \cdot 33 < 0$, geen snijpunten met de x-as.

$x_{top} = -\dfrac{8}{-2} = 4$

$a < 0$; het maximum $f(4) = -17$

snijpunt y-as: (0,-33)

b. $g(x) = x^2 + 4x + 5$

$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -5$ of $x = 1$

De snijpunten met de x-as zijn $(-5,0)$ en $(1,0)$.

$x_{top} = -\dfrac{4}{2} = -2$

$a > 0$; het minimum is $g(-2) = -9$

snijpunt y-as: $(0,-5)$

28. $3x^2-6x+40=2x^2-13+28 \Rightarrow$

$x^2+7x+12=0 \Rightarrow$
$(x+4)(x+3)=0 \Rightarrow$
$x=-4$ of $x=-3$

$x=-4$ en $x=-3$ invullen in $3x^2-6x+40$ of in $2x^2-13+28$ geeft de snijpunten $(-4,112)$ en $(-3,85)$.

29. a. symmetrieas: $x=\frac{8+(-2)}{2}=3$

b. $x_{top}=\frac{4}{2}=2$, symmetrieas: $x=2$

30.

a. TO=$pq=p(65-2,5p)=-2,5p^2+65p$

b. $TW=65p-2,5p^2-(4(65-2,5p)+20)=65p-2,5p^2-260+10p-20=$
$=-2,5p^2+75p-280$

c. $p_{\max}=-\frac{75}{-5}=15 \Rightarrow TW_{\max}=-2,5\times15^2+75\times15-280=282,5 \Rightarrow$
De maximale winst is 282.500 euro.

31. $x_{top}=\frac{-p}{-\frac{2}{5}}=\frac{5p}{2}=20 \Rightarrow p=8$

32.

omtrek $=\frac{300}{5}=60$ meter
$x=$ breedte land $\Rightarrow$ lengte land $=30-x$
lengte×breedte=oppervlakte, dus:
$x(30-x)=200$, dit geeft de vergelijking: $-x^2+30x-200=0$
x oplossen geeft: $-(x-20)(x-10)=0 \Rightarrow x=20$ of $x=10$
Dus de breedte is 10 m en de lengte 20 m.

Referenties

Bronnen

Craats, J. van der, & Bosch, R. (2009). *Basisboek Wiskunde* 2de ed. Amsterdam: Pearson Education.

Douwes, D.J., & Grasmeijer, J. (2009). *Basisvaardigheden wiskunde voor het HTO*, 2de herziene druk. Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.

Gulik, I., Krüger, J., & Zwaart, P. van der (2009). *Vakdossier Wiskunde.* Enschede: SLO.

Pach, F., & Wisbrun, H. (2006). *Wiswijs. Wiskunde als voorbereiding op de voortgezette studie*, 2de druk. Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.

Pelt, Th. M., Pijlgrom, R.B.J., & Walter, J.L. (2005). *Wiskunde voor het hoger onderwijs deel 0*, 4de druk. Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.

Websites

http://www.wisnet.nl/
http://www.nvvw.nl/page.php?id=599
http://www.slo.nl/voortgezet/tweedefase/schoolexamen/handreikingen/
http://www.slo.nl/voortgezet/tweedefase/vakken/wiskunde/lesmateriaal/
http://www.taalenrekenen.nl/

SLO heeft als nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling een publieke taakstelling in de driehoek beleid, praktijk en wetenschap. SLO heeft een onafhankelijke, niet-commerciële positie als landelijke kennisinstelling en is dienstbaar aan vele partijen in beleid en praktijk.

Het werk van SLO kenmerkt zich door een wisselwerking tussen diverse niveaus van leerplanontwikkeling (stelsel, school, klas, leerling). SLO streeft naar (zowel longitudinale als horizontale) inhoudelijke samenhang in het onderwijs en richt zich daarbij op de sectoren primair onderwijs, speciaal onderwijs, voortgezet onderwijs en beroepsonderwijs. De activiteiten van SLO bestrijken in principe alle vakgebieden.

SLO

Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
F 053 430 76 92
E info@slo.nl

www.slo.nl

Foto omslag: humantouchphotography.nl

slo